



Университет российской академии образования  
Нижегородский филиал

Трифонов Ю. В., Яшин С. Н.,  
Кошелев Е. В.

# ТЕХНОЛОГИИ ФОНДОВОГО РЫНКА В БИЗНЕСЕ

*Монография*

Нижний Новгород  
2015

УДК 330.47  
ББК 65.9(2Рос)-56  
Т 91

*Рецензенты:*

Кокин А. С. — доктор экономических наук, профессор  
Кузнецов Ю. А. — доктор физико-математических, профессор

Т 91 **Трифонов Ю. В., Яшин С. Н., Кошелев Е. В. Технологии фондового рынка в бизнесе: Монография.** Нижний Новгород: ООО «Печатная Мастерская РАДОНЕЖ», 2015. — 151 с.

ISBN 978-5905946-34-9

В работе рассмотрены перспективы применения фондовых технологий в бизнесе, предложены модель управления фондовым риском с использованием синтетических стрэддлов, модель оценки проектов R&D методом ROV в условиях ограниченности информации; разработаны методы оценки проекта модернизации оборудования компании как азиатского реального опциона с постоянной волатильностью бизнеса, а также инвестиционная модель управления кредитным риском в коммерческих банках с использованием алгоритма стохастического доминирования.

Монография предназначена для бизнесменов, финансовых аналитиков и топ-менеджеров производственных компаний и коммерческих банков и может быть использована студентами, аспирантами, преподавателями и широким кругом читателей.

Рис. 23. Табл. 21. Библиогр. 85 назв.

ISBN 978-5905946-34-9

УДК 330.47  
ББК 65.9(2Рос)-56

© Трифонов Ю. В., Яшин С. Н., Кошелев Е. В., 2015  
© Н Ф УРАО, 2015

# Оглавление

Введение .....	4
<b>Глава 1. Теоретические основы и перспективы применения фондовых технологий в бизнесе .....</b>	<b>7</b>
1.1. Современные достижения финансовой инженерии .....	7
1.2. Актуальные проблемы оценки проектов методом ROV.....	20
1.3. Стохастическое доминирование в инвестиционном анализе .....	43
<b>Глава 2. Синтетические финансовые инструменты.....</b>	<b>53</b>
2.1. Модель управления фондовым риском с использованием синтетических стрэддлов .....	53
2.2. Статистический метод выбора оптимального синтетического стрэддла.....	64
2.3. Эмпирические результаты .....	67
<b>Глава 3. Реальные опционы .....</b>	<b>74</b>
3.1. Оценка проектов R&D методом ROV в условиях ограниченности информации .....	74
3.2. Модернизация оборудования компании как азиатский реальный опцион с постоянной волатильностью бизнеса ..	93
3.3. Влияние инфляции на изменение стоимости азиатского реального опциона.....	114
<b>Глава 4. Стохастическое доминирование в управлении         кредитным риском .....</b>	<b>125</b>
4.1. Инвестиционная модель управления кредитным риском .	125
4.2. Стохастический метод выбора оптимальной кредитной альтернативы .....	133
<b>Заключение .....</b>	<b>141</b>
<b>Список литературы .....</b>	<b>143</b>

# Введение

Технический прогресс XX и начала XXI века поставил перед инженерами финансовых рынков новые проблемы и обозначил новые перспективы в бизнесе. Все более прогрессирующая глобализация ведет к тому, что даже не особенно крупные фирмы ориентируются в своем инновационном развитии на показатели как национальных, так и мировых фондовых рынков. Таким образом, происходит тесный симбиоз трех направлений современных финансов: технологии фондовых рынков, оценки стоимости бизнеса компаний и их инновационного развития.

По этой причине, например, трейдеры корректируют свои позиции по мере приближения сроков новых технических ярмарок и выставок, поскольку именно от того, какие технические новинки представят именитые и начинающие компании, зависят будущие инвестиционные вложения и соответственно прибыли трейдеров.

Наконец, волна продвижения интернет-технологий еще более усилила взаимосвязь фирм, рынков и собственно покупателей их продукции, а также национальных и глобальных фондовых рынков.

Развитие финансовой инженерии, изначально как науки о новых финансовых инструментах фондового рынка, уже давно вышло за эти узкие рамки. Все больше наиболее прогрессивные компании стремятся снизить свои финансовые риски и спланировать стратегии развития бизнеса с помощью некоторых технологий, применявшихся ранее лишь на фондовых биржах.

К примеру, реальные опционы, как логическое продолжение финансовых опционов, успели и прочно обосноваться в реальном бизнесе, т. е. производстве, так и изрядно надоест некоторым финансовым практикам, аналитикам и топ-менеджерам компаний. Конечно, это ни в коем случае не умоляет их актуальности. В Бразилии и Финляндии они широко используются в бизнесе с целью принятия и реализации гибких управленческих решений. Кроме того, реальные опционы охватили уже и многие смежные отрасли. Здесь мы говорим о патентном праве, государственном управлении и различных социальных явлениях, включая даже индивидуальные предпочтения людей, например, планирование собственной карьеры.

Однако процесс адаптации и применения фондовых технологий к реальному бизнесу не исчерпывается лишь реальными опционами. По нашему мнению, многие деривативы и синтетические финансовые инструменты в ближайшем будущем прочно обоснуются в сознании финансовых аналитиков и практиков. Все это позволит компаниям, прежде всего внедряющим технические инновационные разработки, форсировать за счет этого новые дополнительные и впоследствии основные источники прибыли.

Принимая во внимание подобные перспективы развития финансовой инженерии, мы начинаем нашу монографию так, чтобы еще раз отточить некоторые методики фондовой финансовой инженерии, имея в виду синтетические финансовые инструменты. Это необходимо для того, чтобы потом более логично перейти собственно к применению фондовых технологий в производстве и банковском деле. Безусловно, мы не могли обойти вниманием реальные опционы, принимая во внимание, естественно, и проблемы развития данной отрасли экономики, акцентируя внимание читателя на решении обозначенных нами проблем. По этой причине реальные опционы составляют наиболее значительную часть нашего исследования. При этом мы широко рассматриваем их применение на развивающихся рынках капитала на примере России по причине того, что этим рынкам уделяется все больше внимания в экономиках лидирующих стран.

Наконец, связывая теорию полезности с некоторыми фондовыми технологиями, мы акцентируем также внимание читателя на технологии принятия инвестиционных решений для индивида, не уверенного в своих предпочтениях о полезности будущих экономических результатов и в личных оценках степени риска. Здесь мы говорим о стохастическом доминировании, дополняя его некоторыми элементами теории голосований. Используя данный подход мы выходим на решение проблемы управления кредитным риском в коммерческих банках. Для этого мы предлагаем рассматривать коммерческий банк как инвестора, который, прежде чем инвестировать свои средства в какие-либо направления деятельности, просчитывает как возможности получения убытков, так и возможности недополучения дохода в результате выбора не самой оптимальной кредитной альтернативы. Мы назвали это инвестиционным подходом, который как раз и под-

разумеает для решения такой задачи использовать предложенный нами алгоритм стохастического доминирования.

Авторы надеются, что их разработки помогут финансовым аналитикам и топ-менеджерам компаний и банков более рационально планировать развитие их бизнеса, а также помогут программистам в создании нового программного обеспечения для решения различных финансовых задач, которое будет более адаптированным к рациональной поставке самих финансовых задач.

# Глава 1

## Теоретические основы и перспективы применения фондовых технологий в бизнесе

### 1.1. Современные достижения финансовой инженерии

Говоря о классическом подходе к управлению финансовыми рисками, следует отметить три разных, но взаимосвязанных способа управления ими [7]. Первый связан с покупкой страховки (*insurance*). Однако *страхование* является действенным лишь при управлении определенными типами финансового риска. Говорят, что такие риски являются страхуемыми. Вторым способом является *управление активами и пассивами* (*asset/liability management*). Этот способ состоит в тщательном сбалансировании активов и обязательств с тем, чтобы исключить изменения чистой стоимости. Управление активами и пассивами наиболее часто используется при управлении процентным риском и валютным риском. Последним способом, который может быть использован сам по себе или в сочетании с первыми двумя, является *хеджирование* (*hedging*). Хеджирование состоит в использовании компенсирующей риск позиции. Оно весьма сходно с управлением активами и пассивами, однако в отличие от управления активами и пассивами, которое по определению связано с балансовыми позициями, хеджирование обычно означает использование забалансовых позиций. Это различие между управлением активами и пассивами и хеджированием является очень важным, однако его часто не учитывают. Более того, многие специалисты часто рассматривают стратегии управления активами и пассивами как варианты хеджирования, и наоборот. Для наших целей имеет смысл эти способы различать.

Наиболее важными конкретными финансовыми инструментами, используемыми при управлении фондовым риском, являются *свопы*, *фьючерсы*, *форварды* и *опционы*. Все эти инструменты являются

контрактами забалансового типа и поэтому их используют как инструменты хеджирования.

Хотя хеджирование и связано с управлением активами и пассивами и часто используется в сочетании с ним, оно представляет собой отдельный класс методов. *Хедж* — это позиция, которую используют в качестве временной замены (субституции (substitute)) будущей позиции по другому активу (обязательству) или с целью защиты стоимости существующей позиции по активу (обязательству), пока эта позиция не сможет быть ликвидирована.

Измерение эффективности хеджа производится следующим образом [7]. Степень корреляции цен двух финансовых инструментов говорит о том, насколько изменение одной цены отслеживает изменение другой. Корреляция измеряется с помощью статистического параметра, называемого коэффициентом корреляции. Будем обозначать коэффициент корреляции через  $\rho$ . Риск, остающийся после использования хеджа, называется базисным риском (basic risk); при этом предполагается, что применяется правильный коэффициент хеджирования. Взаимосвязь базисного риска (в терминах дисперсии) и ценового риска определяется следующим соотношением:

$$\text{Базисный риск} = (1 - \rho^2) \cdot \text{Ценовой риск.}$$

Заметим, что в формуле используется квадрат коэффициента корреляции, а не сам коэффициент корреляции. Эта квадратичная величина называется коэффициентом детерминации (coefficient of determination). Он дает точную меру доли исходного риска, которая устраняется хеджированием. Например, допустим, что  $\rho^2 = 0,87$ , тогда хедж снизит риск на 87%. При этом, конечно, останется 13% исходного риска. Эта остающаяся часть риска является базисным риском. В силу очевидных причин коэффициент детерминации чаще всего служит мерой эффективности хеджа.

Хеджеры часто интересуются источниками базисного риска. Если лучше понять источники риска, то можно научиться строить более эффективные хеджи. Базисный риск существует, поскольку наличная цена и цена инструмента хеджирования не полностью коррелированы между собой. А это происходит в силу того, что закон спроса и предложения на наличном рынке работает несколько иначе,



чем закон спроса и предложения на рынке инструментов хеджирования. Как правило, цены не могут расходиться слишком далеко друг от друга, не предоставляя при этом арбитражных возможностей. Однако они могут расходиться до некоторой степени и не предоставляя арбитражных возможностей, тогда базисный риск сохраняется.

Никакие рынки за всю историю финансовых рынков не эволюционировали так бурно, как рынки свопов. *Свопы* используются для уменьшения стоимости капитала, управления рисками, экономии на масштабах, арбитража на мировых рынках капитала, освоения новых рынков и создания синтетических инструментов.

Существуют три основные разновидности свопов: 1) процентный своп для конверсии обязательств с фиксированной ставкой в обязательства с плавающей процентной ставкой; 2) валютный своп, конвертирующий обязательства в одной валюте в обязательства в другой и 3) товарный своп, конвертирующий плавающую цену в фиксированную.

Все свопы сконструированы по одной и той же схеме [7]. Два участника, называемые контрагентами, договариваются об одном или нескольких обменах определенным количеством базовых активов. Количества базовых активов в свопе называются условными суммами (*notionals*), чтобы отличать их от количеств, физически обмениваемых на наличном рынке, которые называются актуалами (*actuals*). Своп может включать в себя один, два или серию обменов условными суммами или не содержать ни одного обмена. Чаще всего своп включает один обмен условными суммами в момент открытия контракта и обратный обмен в момент его завершения.

В процентных свопах (*interest rate swaps*) заменяемые условные суммы — это некоторые суммы денег, и поэтому они называются условными основными суммами (*notional principals*). В таком свопе условные основные суммы, которые должны быть обменены, одинаковы и выражены в одной и той же валюте. Значит, без них вообще можно обойтись — это и объясняет происхождение термина “условная сумма”. Более того, т. к. обычные периодические платежи, называемые в этом случае процентами, тоже выплачиваются в одной и той же валюте, только разница стоимостей должна обмениваться периодически в установленные для расчета дни.

Использование процентных свопов часто мотивируется желанием уменьшить затраты на финансирование. В этих случаях одна сторона имеет доступ к сравнительно дешевому финансированию с фиксированной ставкой, но ей необходимо финансирование с плавающей ставкой, в то время как другая сторона имеет в своем распоряжении сравнительно недорогое финансирование с плавающей ставкой, но хочет иметь финансирование с фиксированной ставкой. Заключая своповые контракты со своповым дилером, обе стороны могут получить ту форму финансирования, которую желают, и одновременно использовать свои относительные преимущества заимствования.

Можно также создать новый вариант свопа. Первый способ — заключить два отдельных контракта. Они оба могут быть свопами или только один из них. Например, можно заключить процентный своп, выступая в качестве плательщика плавающей ставки, с одновременным заключением многопериодного процентного опциона, такого, как *процентный кэп*. Кэп — это соглашение, по которому на выплачиваемую плавающую ставку накладывается верхнее ограничение.

Еще один способ создать новый вариант свопа — изменить условия самого свопа. Существует масса возможностей приспособить своп к конкретным желаниям конечного пользователя. Например, в то время как условная сумма обычно не амортизируется в период действия свопа, можно учесть ее амортизацию; свопы можно заключать с опционом на возможное удлинение или укорачивание их продолжительности (*tenor*); свопы можно заключать с отсроченным назначением (*setting*) свопового купона и т. д. [58].

Смысл нашего обсуждения состоит в том, что все структуры свопов основаны на одной и той же базисной модели. Варьируя условия свопа, комбинируя свопы или комбинируя свопы с другими инструментами, можно разработать огромное количество новых структур. Тем не менее все свопы очень легко понять, раскладывая их на составляющие элементы.

*Фьючерсы и форварды* — это заключаемые между двумя сторонами контракты, которые требуют выполнения определенных действий в более поздний срок. Наиболее часто эти действия принимают форму поставки некоторых базовых активов. Именно по этой причине

такие контракты часто называются контрактами с отсроченной поставкой (*deferred delivery*). Такое определение позволяет различать контракты с более поздней поставкой товара и контракты с немедленной поставкой. Последние называются спотовыми контрактами. Спотовые и форвардные рынки вместе составляют наличные рынки.

Фьючерсы отличаются от форвардов несколькими важными признаками [7]. Во-первых, фьючерсами торгуют на фьючерсных рынках, а форвардами — на внебиржевых рынках с участием дилеров. Во-вторых, фьючерсы — это контракты с высокой степенью стандартизации, в которых все условия контракта, кроме его цены, определяются биржей, на которой ими торгуют. Форвардные контракты заключаются между контрагентами так, что все условия контракта определяются по взаимному соглашению. В-третьих, между сторонами фьючерсной сделки стоит клиринговая ассоциация. В результате личности контрагентов не имеют принципиального значения. Что касается форварда, то здесь каждая сторона непосредственно несет ответственность перед другой и, следовательно, личности партнеров играют исключительно важную роль. В-четвертых, финансовая целостность фьючерсных рынков защищается требованиями к каждой стороне оплачивать контрактную гарантию, называемую маржей (*margin*). Благодаря ежедневной рыночной переоценке (*mark-to-market*) биржевых позиций с соответствующим трансфертом маржи каждая из сторон контракта застрахована от действий партнера. Такая процедура, которая требует систематического поддержания маржи, на форвардных рынках не используется. Следовательно, участники финансового форвардного рынка вынуждены ограничивать свой выбор лишь теми партнерами, которые им хорошо известны. Наконец, принятая структура фьючерсных контрактов позволяет очень легко завершать их с помощью простой компенсационной сделки. Форвардные контракты значительно труднее завершить (а часто и вообще невозможно).

В финансовой инженерии существует возможность воспроизводить свопы, используя форварды, т. е. возможно создание синтетических свопов из форвардов. *Синтетические инструменты* (*synthetic instrument*) — это такие инструменты, которые создаются путем комбинирования других инструментов так, чтобы воспроизвести сово-

купность денежных потоков, создаваемую реальными инструментами. Синтетические инструменты создаются и используются в разнообразных целях. Наиболее очевидная причина — это желание уменьшить затраты на хеджирование, создавая такие синтетические хеджирующие инструменты, когда синтетический инструмент более эффективен по затратам, чем реальный хеджирующий инструмент, а затем устроить арбитраж между синтетическими и реальными инструментами.

Инструменты, которые мы будем далее обсуждать, отличаются от других финансовых инструментов тем, что они в некотором смысле позволяют сделать выбор (*option*). *Опцион* — это контракт, дающий владельцу, или держателю опциона, право купить или продать определенный актив по некоторой, заранее оговоренной цене в течение определенного промежутка времени. Опционы могут быть выписаны фактически на любой актив, однако наибольшее распространение они получили в связи с операциями с недвижимостью и ценными бумагами. Самая важная характеристика опциона заключается в том, что держатель опциона не обязан совершать предусмотренных в контракте действий, т. е. опцион дает его собственнику право, но не обязанность купить или продать актив. Таким образом, если в случае исполнения опциона могут возникнуть отрицательные последствия, владелец опциона предпочтет отказаться от его исполнения.

Предметом опционной сделки могут быть: 1) обыкновенные акции; 2) значения фондовых индексов, таких как S&P 500 и NYSE Index. Кроме того, широкое распространение получили фьючерсные опционы (*options on futures*), представляющие собой право покупки или продажи определенного фьючерсного контракта на один из следующих активов: 1) долговые инструменты, такие как казначейские облигации и векселя; 2) товары, такие как пшеница и золото; 3) иностранная валюта [1].

Становление и развитие опционной торговли на практике сопровождалось разработкой единой терминологии, широко используемой всеми участниками опционных рынков. Охарактеризуем наиболее распространенные термины в приложении к обыкновенным акциям, рассматриваемым в качестве базового актива опционного контракта.

1. *Колл опцион* (call option) — право купить заданное число акций по определенной цене в течение оговоренного срока.
2. *Пут опцион* (put option) — право продать заданное число акций по определенной цене в течение оговоренного срока.
3. *Цена опциона* (option price) — сумма, уплачиваемая покупателем опциона продавцу, т. е. *лицу, выписавшему опцион*.
4. *Цена исполнения* (exercise, striking price) — цена акции, по которой держатель опциона может купить или продать заданное число акций в течение оговоренного срока.
5. *Дата истечения опциона* (expiration date) — последний день, в который опцион может быть исполнен. При обращении опционов на биржах за дату истечения опциона принимается месяц, в котором истекает контракт, скажем, январь или февраль. В этот месяц все котируемые опционы истекают по завершении третьей пятницы, что легко позволяет покупателям и продавцам вычислять точную дату истечения опциона.
6. *Европейские и американские опционы*. Европейские опционы могут быть исполнены только в момент истечения опциона. Другими словами, они дают держателям опциона право купить (или продать) обыкновенную акцию по определенной цене точно в оговоренный момент времени. Американские опционы могут быть исполнены в любое время — в момент истечения или в любой момент до этой даты.
7. *Непокрытый* (naked) *и покрытый* (covered) *опционы*. Продавцу колл опциона может потребоваться обеспечение опциона — сами акции, являющиеся для опциона базисным активом, — для того, чтобы покупатель колл опциона мог исполнить свое право купить эти акции. Если продавец продает колл опцион на акции, которыми он не владеет, говорят, что продавец продает непокрытый колл опцион. Если же продавец реально владеет лежащими в основе опциона акциями, то он продает покрытый колл опцион.

8. Опцион “в деньгах” (in-the-money) и опцион “без денег” (out-of-the-money). Текущая цена акции, лежащей в основе опциона, может быть выше, равна или ниже цены исполнения опциона на эту акцию. Если цена базисной акции выше цены исполнения колл опциона, говорят, что опцион находится “в деньгах”. В сущности, опцион имеет срочную стоимость для своего держателя, которая может быть реализована исполнением опциона и покупкой акции по цене исполнения опциона с последующей перепродажей ее по более высокой рыночной цене. Если цена базисной акции ниже цены исполнения колл опциона, говорят, что опцион находится “без денег”. Те же самые термины применяются к пут опционам, но определения изменяются в противоположную сторону.

В настоящее время чаще всего используются две модели оценки опционов: 1) модель Блэка–Шоулза и 2) биномиальная модель.

1. Модель ценообразования опционов Блэка–Шоулза (Black–Scholes Option Pricing Model, OPM), которая оценивает колл-опционы, была разработана в 1973 г., когда уже начался период быстрого роста опционной торговли [32].

Чтобы вывести свою модель ценообразования опционов, Блэк и Шоулз сделали следующие предположения:

- (1) По базисному активу колл опциона дивиденды не выплачиваются в течение всего срока действия опциона.
- (2) Нет трансакционных затрат, связанных с покупкой или продажей акции или опциона.
- (3) Краткосрочная безрисковая процентная ставка известна и является постоянной в течение всего срока действия опциона.
- (4) Любой покупатель ценной бумаги может получать ссуды по краткосрочной безрисковой ставке для оплаты любой части ее цены.
- (5) Короткая продажа разрешается без ограничений, и при этом продавец получит немедленно всю наличную сумму за проданную без покрытия ценную бумагу по сегодняшней цене.
- (6) Колл-опцион может быть исполнен только в момент истечения опциона.

(7) Торговля ценными бумагами ведется непрерывно, и цена акции движется непрерывно и случайным образом.

Вывод ОРМ основывается на концепции безрискового хеджа. Покупая акции и одновременно продавая колл опционы на эти акции, инвестор может конструировать безрисковую позицию, где прибыли по акциям будут точно компенсировать убытки по опционам, и наоборот. Безрисковая хеджевая позиция должна приносить доход по ставке, равной безрисковой процентной ставке, в противном случае существовала бы возможность извлечения арбитражной прибыли и инвесторы, пытаясь получить преимущества от этой возможности, приводили бы цену опциона к равновесному уровню, который определяется ОРМ.

ОРМ состоит из следующих формул [32]:

$$\begin{aligned}C_0 &= S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2), \\d_1 &= \frac{\ln \frac{S_0}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma \sqrt{T}}, \\d_2 &= d_1 - \sigma \sqrt{T},\end{aligned}$$

где  $C_0$  — текущая стоимость колл опциона в момент  $T$  до истечения срока опциона;

$S_0$  — текущая цена базисного актива (предполагается, что актив не приносит текущего дохода, т. е. дивиденда или купона);

$K$  — цена исполнения опциона (цена “strike”);

$r$  — непрерывная годовая ставка безрисковой доходности (сила роста);

$T$  — время до исполнения опциона (в годах);

$\sigma$  — средне-квадратическое отклонение цены базисного актива за год;

$N(d_1)$  — вероятность того, что отклонение будет меньше  $d_1$  в условиях стандартного нормального распределения (таким образом,  $N(d_1)$  и  $N(d_2)$  ограничивают область значений для функции стандартного нормального распределения).

В сущности,  $S_0N(d_1)$  может рассматриваться как дисконтированная ожидаемая конечная цена акции, тогда как второй член,  $Ke^{-rT}N(d_2)$ , может трактоваться как дисконтированная цена исполнения.

Текущая стоимость пут опциона согласно ОРМ вычисляется по формуле [5]

$$P_0 = Ke^{-rT}(1 - N(d_2)) - S_0(1 - N(d_1)).$$

Кроме того, если уже известна текущая стоимость колл опциона, то текущую стоимость пут опциона можно найти, используя *пут-колл паритет* [1, 4]:

$$S_0 - C_0 + P_0 - \frac{K}{(1 + r_f)^T} = 0,$$

где  $r_f$  — дискретная годовая безрисковая процентная ставка.

2. *Биномиальная модель* используется для оценки опционов [41] в том случае, когда предполагается, что динамика курса акций характеризуется биномиальным процессом (рис. 1). Срок действия опциона подразделяется на субпериоды, и предполагается, что друг за другом следует серия процессов Бернулли. При этом допускается, что сами вероятности изменения курса акций, так же, как темпы их изменения, на протяжении времени остаются неизменными.

В данном биномиальном процессе курсы акций во время срока действия опциона в каждый момент времени  $t$  или повышаются с вероятностью  $q$ , или снижаются с вероятностью  $1 - q$ . Следовательно, сегодняшний курс акции  $S_0$  идет или вверх (up), или вниз (down). Поэтому соответствующие детерминанты изменений обозначены  $u$  или  $d$ . Так, в момент  $t = 1$  в случае повышательной динамики новый курс акции составляет  $S_1 = S_0u$ , а в случае понижения  $S_1 = S_0d$ .

Согласно биномиальной модели текущая стоимость колл опциона вычисляется с помощью формулы [4]

$$C_0 = S_0 \text{Vi}(a|n, p') - K \frac{1}{(1 + r_f)^n} \text{Vi}(a|n, p),$$



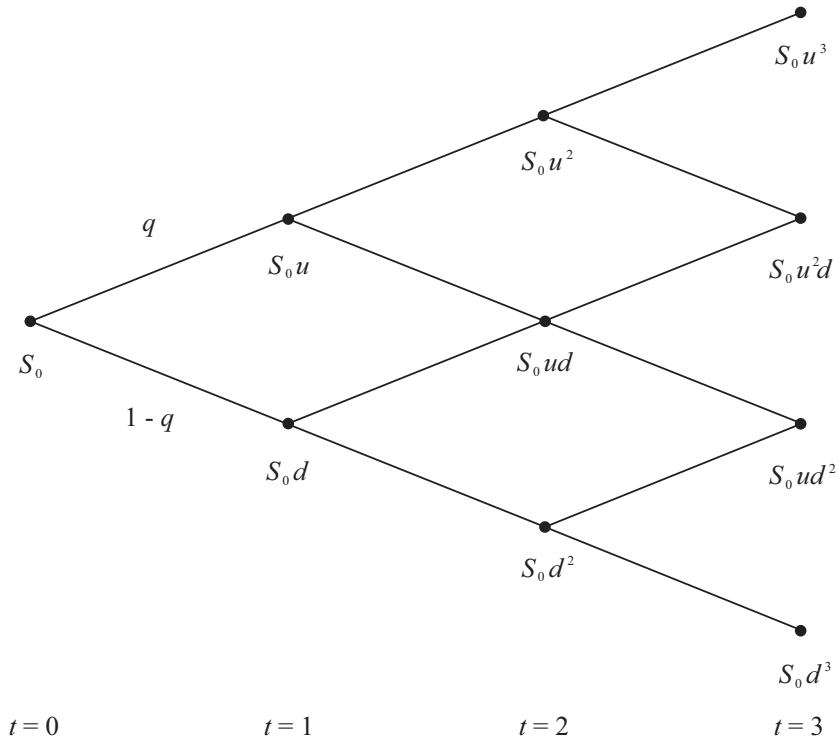


Рис. 1. Биномиальный процесс

где  $r_f$  — дискретная годовая безрисковая процентная ставка;

$\text{Vi}(a|n, p)$  — биномиальная вероятность, вычисляемая как

$$\text{Vi}(a|n, p) = \sum_{k=a}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Данный показатель является псевдовероятностью выгоды использования опциона по окончании срока его действия. Иными словами,  $\text{Vi}(a|n, p)$  представляет собой сумму индивидуальных

вероятностей того, что курс акции после  $n$  периодов окажется, по меньшей мере, так же высок, как цена исполнения. При этом биномиальный коэффициент определяется равенством

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Если еще доопределить

$$p' = p \frac{u}{1+r_f} \quad \text{и} \quad 1-p' = (1-p) \frac{d}{1+r_f},$$

то получится биномиальная вероятность  $\text{Bi}(a|n, p')$ . Так как курс акции в каждом периоде  $t$  или повышается в  $u$  раз, или снижается в  $d$  раз, существует критическое значение  $d$ , при котором курс в точности достигает значения  $S_0 u^k d^{n-k}$  или впервые превышает его. Такое критическое значение  $k$  обозначается символом  $a$ . Следовательно, курс акции должен повыситься по меньшей мере в  $a$  раз (или должен снизиться самое большее в  $n-a$  раз), чтобы использование опциона было выгодным. Чтобы определить это  $a$ , используется вспомогательная переменная  $a'$ , которая определяется из равенства

$$S_0 u^{a'} d^{n-a'} - K = 0.$$

Если это равенство прологарифмировать и выразить  $a'$ , то получим:

$$a' = \frac{\ln \frac{K}{S_0 d^n}}{\ln \frac{u}{d}}.$$

Как правило,  $a'$  не является целым числом, так что в качестве нижней границы для  $k$  можно предложить самое маленькое целое число  $a \geq a'$ . Наконец, псевдовероятности оцениваются по формулам:

$$p = \frac{r_f - r_d}{r_u - r_d} \quad \text{и} \quad 1-p = \frac{r_u - r_f}{r_u - r_d},$$

где  $r_u$  и  $r_d$  — доходности акции для двух ситуаций:

$$u = 1 + r_u \quad \text{и} \quad d = 1 + r_d.$$

Текущая стоимость пут опциона согласно биномиальной модели вычисляется по формуле [4]

$$P_0 = K \frac{1}{(1 + r_f)^n} (1 - \text{Vi}(a|n, p)) - S_0 (1 - \text{Vi}(a|n, p')).$$

Комбинируя различные опционные контракты на одни и те же акции или комбинируя опционы и длинные или короткие контракты на базисные акции, инвесторы могут конструировать позиции с широким диапазоном показателей риска (доходности). Используется множество *комбинаторных позиций* (combination positions), и их названия, такие как стрэддлы, стрипы и стрэпы, хорошо известны инвесторам — участникам рынка опционов [1]. *Стрэддлы* будут нами использоваться в главе 2, а потому подробно будут описаны в ней.

В настоящее время существуют также некоторые расширенные модификации обычных опционов. Их называют *многопериодными опционами*. К ним относятся кэпы, флоры, коллары, кэпционы, свопционы и сложные опционы [7].

*Процентные флоры* (interest rate floor), или просто флоры — это многопериодные процентные опционы, идентичные кэпам, с тем только отличием, что продавец флора платит покупателю, когда ставка-ориентир опускается ниже контрактной ставки, называемой ставкой “флор” (floor).

*Процентный коллар* — это комбинация кэпа и флора, в которой покупатель коллара покупает кэп и одновременно продает флор. Коллары можно сконструировать из двух отдельных сделок (одной — с кэпом и другой — с флором), но они могут быть реализованы в виде одной сделки. В результате покупки коллара происходит “запирание” плавающей ставки процента на интервале, ограниченном с двух сторон: сверху и снизу. Эта процедура иногда называется запиранием в диапазоне (locking into a band).

Другой специальный тип процентного опциона — это в действительности опцион на опцион. Точнее говоря, это опцион “колл” на

кэп. Этот тип опциона, который называется *кэпционом* (caption), стал применяться с середины 1980-х гг. Термин “кэпцион” — зарегистрированная сервисная марка *Marine Midland Bank*.

Вопрос, который немедленно возникает: почему вдруг опцион на опцион? Ответ удивительно прост. Иногда фирма хочет закрепить за собой *право* на защиту процентного риска, но в действительности не уверена, что ей понадобится такая защита, или ей кажется, что может появиться лучшая альтернатива, если немного подождать. В таких ситуациях финансовые инженеры предлагают кэпцион или кэпциоподобные инструменты.

*Свопцион* (swaption) — это опцион на своп. Такие опционы заключаются на процентные, валютные, товарные и фондовые свопы. Суть их почти такая же, как в случае опциона на кэп. Клиент и дилер договариваются об условиях свопа. Но клиент не хочет или не может немедленно заключить своп. В то же самое время клиент не исключает, что рынок может измениться неблагоприятно к моменту, когда он сможет заключить своп. Чтобы зафиксировать условия свопа, клиент соглашается купить у свопового дилера свопцион. В результате дилер гарантирует выполнение оговоренных условий свопа на некоторый период, например, месяц, в течение которого клиент может решить, исполнять свопцион или нет. Как всегда, клиент должен будет заплатить за свопцион “премию”. Эта премия “пропадет” в любом случае — будет ли клиент исполнять свопцион или нет.

*Сложные опционы* (compound options) — это опционы на опционы. Единственный пример такого опциона, который мы рассмотрели до сих пор, — это кэпцион. Этот опцион на кэп — вполне понятный пример опциона на опцион. Но, конечно, существуют и более уточненные варианты сложных опционов [7].

## 1.2. Актуальные проблемы оценки проектов методом ROV

В настоящее время технический прогресс во многом обуславливает повышение материального благосостояния общества. Однако при этом важно правильное понимание процессов внедрения технических и технологических инноваций в социальную деятельность

человека, прежде всего в сфере экономического развития общества. Таким образом, экономическое внедрение, в первую очередь, технических инноваций, в ведущих и развивающихся компаниях во многом предопределяет успешность функционирования экономики страны, что непосредственно влияет на повышение материального уровня жизни населения.

В таком контексте создание соответствующих экономических и финансовых технологий успешного внедрения технических инноваций является одной из первоочередных задач производственных компаний. Одним из таких направлений является теория и практика реальных опционов (метод ROV), которые уже достаточно давно используются в бизнесе с того момента, когда опционные технологии фондового рынка были впервые адаптированы к потребностям производства. Сам термин “реальный опцион” ввел в финансовую науку Стюарт Майерс [65]. С тех пор понятие “реального опциона” серьезно прогрессировало, развившись как в отдельное глобальное научное направление, так и в достаточно широкую сферу практического приложения в бизнесе.

Несмотря на широкий охват различных направлений бизнеса технологиями реальных опционов, бум этого метода финансового анализа и стратегического планирования прошел еще в 1990-х годах. Сейчас многие сайты, посвященные реальным опционам, такие, как, например, *www.real-options.com*, выглядят откровенно усталыми, и лишь некоторые из них, такие, как, например, *www.realoptions.org*, продолжают проводить серьезные исследования в этом направлении, но уже в чисто научной сфере, используя для этого все чаще аппарат стохастической финансовой математики.

В выпуске журнала *The Economist* от 14 августа 1999 г. в рамках традиционной странички *Economics Focus* было приведено мнение: реальные опционы смогут получить широкое распространение на практике только после того, как большинство менеджеров будут иметь докторскую степень по прикладной математике. Однако многим ведущим компаниям мира именно использование реальных опционов помогло серьезно обогнать своих конкурентов в бизнесе, значительно увеличив при этом свою рыночную капитализацию. Пожалуй, наиболее ярким примером здесь является компания

*Amazon.com*, которую в свое время даже прозвали “шведским столом из реальных опционов” [9].

Разумное понимание этой проблемы, на наш взгляд, должно предполагать поступательность познания истинных потребностей и задач экономики в целом и бизнеса, в частности. Так, к примеру, уже давно в инструментарий бизнесменов и финансовых аналитиков вошло использование в своей работе компьютерного обеспечения, которое значительно ускоряет процессы принятия управленческих решений. Скажем, построить элементарную линейную регрессию для прогнозирования каких-либо экономических показателей сейчас можно почти в любой программе, в том числе и в *MS-Excel*. Другим примером является использование в финансовых расчетах линейного и целочисленного программирования, которые необходимы в ряде инвестиционных задач. Тем не менее, сама теория этих методов подразумевает серьезные познания в области прикладной математики.

Для реальных опционов тоже уже давно существуют соответствующие программные обеспечения, позволяющие достаточно легко ввести исходные данные в программу и быстро получить конечный результат в виде конечной цифры, означающей, например, стоимость реального опциона, которую затем можно, скажем, прибавить к NPV инвестиционного проекта. Такая процедура уже ни у кого из бизнесменов и аналитиков не вызывает внутреннего неприятия, поскольку она элементарна.

Однако этим вовсе не должно исчерпываться использование реальных опционов в практике ведения бизнеса. Причин для этого, на наш взгляд, две.

1. Многие ученые, например, Джулиан Рош [9], справедливо утверждают, что с реальными опционами связано много чисто технических проблем финансового характера, к числу которых в первую очередь следует отнести то, что значительное число фирм предпочитают иметь в своем арсенале реальные опционы, но при этом их не исполняют. Это приводит к неоправданному завышению ценности инвестиционных и инновационных проектов, которые в реальности могут оказаться даже убыточными. Это негативно влияет на будущую рыночную стоимость такой фирмы.

2. Сам принцип построения и анализа реального опциона должен концентрировать свое внимание прежде всего на постановке финансовой задачи, т. к. неправильно сформулированные инвестором цели однозначно приведут его к ошибочным, а потому неэффективным управленческим решениям. Правильное понимание инвестором того, что он хочет получить от бизнеса, гораздо важнее самих математических методов решения во многом стандартных задач. Попросту говоря, правильная постановка задачи — это уже наполовину решенная задача.

Учет выше сказанных причин, поможет переместить основное внимание на более адекватное построение реального опциона в целях решения задач инновационного развития компаний. И только после этого возможен выбор наиболее оптимального метода оценки опциона.

Одним из наиболее рациональных подходов к составлению и применению реальных опционов на наш взгляд является восприятие их не как европейских опционов, используя для решения модель Блэка-Шоулза, и не как американских, используя для вычислений классическую биномиальную модель, а понимание реального опциона как опциона азиатского, т. е. опциона с изменяющейся ценой исполнения. Так, например, в работах [14, 15, 21, 22, 59] мы учли это с помощью влияния инфляции, однако проблема далеко не исчерпывается только ей. Реальность использования в бизнесе реальных опционов заключается в том, что продавец опциона (заказчик), подобно покупателю опциона (инвестору), тоже рассчитывает на гибкость в бизнесе и потому ее также просчитывает. В результате получается двусторонняя гибкость для двух юридических лиц опционного контракта.

В связи с этим, не совсем понятно, зачем тогда некоторым критикам теории оценки стоимости реальных опционов (ROV) нужно определение того, что такое “реальный опцион”. В настоящее время в решении этого вопроса примерно такая же ситуация, как, например, в стремлении одинаково определить атомы и молекулы, или, скажем, физику и математику.

Реальные опционы настолько прочно вошли в инвестиционный анализ, что применимы, например, для решения задачи замены оборудования фирмы. (Не говоря уже о стоимости репутации, квалифи-

кации топ-менеджеров, стоимости брендов и т. д.) Дело в том, что реальные опционы — это уже два совершенно разных самостоятельно развивающихся направления:

- (1) ROV как юридические контракты;
- (2) ROV как метод финансовой оценки почти всего в бизнесе.

Математическая сложность, связанная с деривативами и теорией реальных опционов, происходит из потребности в вероятностном решении для оптимального инвестиционного решения в течение всего срока действия опциона. Решение этой динамической проблемы оптимизации, как описано у Диксита и Пиндика [40], состоит в том, чтобы смоделировать неопределенность для базисного актива как вероятностный процесс, где оптимальная ценность инвестиционного решения может быть получена при решении дифференциального уравнения с соответствующими граничными условиями. Во многих случаях, однако, у такого дифференциального уравнения нет аналитического решения, или упрощенные предположения относительно граничных условий не отражают фактическую сложность проблемы. В этих случаях может использоваться дискретное приближение к основному вероятностному процессу, чтобы получить решение, которое в вычислительном отношении эффективно для динамической проблемы оценки вручную.

Одна из этих альтернатив — биномиальная решетка, которая является здоровым, точным и интуитивно привлекательным инструментом для моделей оценки опциона. Дискретная рекомбинирующая биномиальная модель, развитая Коксом, Россом и Рубинштейном [41], чтобы оценить деривативы, широко принята как эффективное приближение к модели Блэка–Шоулза [31] из-за ее непринужденности в использовании, гибкости и того факта, что она приближенно соответствует геометрическому броуновскому движению (GBM) с временным шагом уменьшения ( $\Delta t$ ). Кроме того, в противоположность модели Блэка–Шоулза [32], этот подход предоставляет решение раннего исполнения опционов американского типа. Подход, используемый Коксом, Россом и Рубинштейном [41], где узлы отделения повторно объединяются вследствие того, что восходящее движение ( $u$ ) является инверсией нисходящего движения ( $d$ ), означает, что на каж-



дом шаге  $N$  всегда получается  $N + 1$  узлов, а не  $2^N$ , как в случае нерекombинирующего дерева. Рекombинирующая решетка проста и практична, чтобы осуществить ее в крупноформатной таблице, такой, как *Excel*, или даже в программах дерева решений. В подходе, развитом Брандао, Дайером и Ханом [34, 35], например, выплаты в каждом отделении дерева соответствуют потокам наличности каждого базисного актива.

Часто, однако, неопределенность, которая будет смоделирована, не ведет себя как тип GBM стохастического диффузионного процесса. Это происходит, когда измерение переменной — функция долгосрочного уровня равновесия или средняя, поскольку обычно имеют место нефинансовые продукты или процентные ставки. Несколько авторов, таких как Бессимбиндер и др. [31], Шварц [71, 72], Лаутон и Якоби [60], среди других предполагают, что этот тип переменной часто показывает авторегрессионное поведение и подтверждение факта, что моделирование такой переменной с GBM может преувеличить диапазон изображенных ценностей и в результате преувеличить ценность опционов, описанных этой переменной.

Но подход Кокса, Росса и Рубинштейна [41] относится только к неопределенности, которая может быть смоделирована посредством процесса GBM. Как альтернативу Нельсон и Рамасвами [66] предлагают родовой биномиальный подход к моделированию, который может использоваться, чтобы приспособить другие процессы к GBM. Хан и Дайер [51] приспособливают его, чтобы смоделировать процесс возвращения к среднему через достаточно универсальную методологию, которая может даже использоваться, чтобы смоделировать двумерные проблемы.

Бастиан-Пинто, Брандао и Озорио [29] развивают альтернативный подход симметричной биномиальной решетки, который является эквивалентным подходу Кокса, Росса и Рубинштейна [41] для моделирования GBM, но является также более родовым и в состоянии смоделировать другие марковские процессы, будучи более интуитивным, чем подход Нельсона и Рамасвами [66].

Использование биномиальных решеток, подобных классической модели GBM Кокса, Росса и Рубинштейна [41], чтобы смоделировать другие марковские процессы, было редким вследствие того, что

такие модели часто подразумевают вероятности перехода больше 1 или меньше 0, когда влияние возвращения к среднему (MR) особенно сильно. Следовательно, дискретные тринomialные и мультиномиальные деревья [53] и модели симуляции Монте-Карло были основными методами, используемыми, чтобы смоделировать MR-процессы. К сожалению, тринomialные деревья, такие, как предложенные Ценом и Лином [81], Цлевлоу и Стриклендом [39], Халлом и Уайтом [55, 56] and Халлом [53], требуют более вовлеченных методологий для того, чтобы определить действительные ветвящиеся вероятности и клетку решетки, построенную так, чтобы гарантировать сходимость стохастического процесса. Это требует более сложного программирования и приводит к трудности в применении тринomialных деревьев к широкому диапазону определенных проектов и случаев [29].

Подходы симуляций Монте-Карло, такие, как метод наименьших квадратов у Лонгстаффа и Шварца [62], в состоянии приспособить почти любой стохастический процесс, включая комбинацию различных процессов, устраняя таким образом так называемое “проклятие размерности и моделирования”. Однако недостаток этих моделей заключается в моделировании решений, которые могут представлять проблемы в моделировании, например, составных опционов.

Стохастический процесс возвращения к среднему (MR) — это марковский процесс, в котором направления и интенсивность отклонения — функция долгосрочного уровня равновесия, к которому должна вернуться текущая цена. Следуя логике, модель возвращения к среднему происходит из микроэкономики: когда стоимость понижена (или ниже долгосрочного уровня равновесия), спрос на этот продукт имеет тенденцию увеличиваться, в то время как производство имеет тенденцию уменьшаться. Это связано с тем, что потребление товара, например, вследствие увеличения цены уменьшается, в то время как низкие возвратные потоки производителям приведут к решению отложить инвестиции или закрыть менее эффективные их единицы, уменьшая таким образом поставку продукта. Противоположное событие произойдет, если цены будут высокими (или выше долгосрочного уровня равновесия, или средними). Как пример, эмпирические исследования [67] показали, что эти микроэконо-

мические силы действительно заставляют цены на нефть следовать среднему возвратному стохастическому поведению.

Самая простая форма MR-процесса — это однофакторный процесс Орнштейна–Уленбека, названный также арифметическим MR-процессом, который определяется как

$$dx_t = \eta(\bar{x} - x_t)dt + \sigma dz_t,$$

где  $x_t$  — натуральный логарифм  $S_t$ , т. е. ценности или цены изменяющейся переменной;

$\eta$  — средняя скорость возвращения к среднему;

$\bar{x}$  — долгосрочное среднее число, к которому возвращается  $x_t$ ;

$\sigma$  — волатильность процесса;

$dz$  — стандартный винеровский процесс.

Используется натуральный логарифм переменной, т. к. в случае товаров принято считать, что их цены имеют логнормальное распределение. Это удобно, потому что с тех пор, как  $S = e^x$ ,  $S$  не может быть отрицательным. Поэтому математическое ожидание и вариация процесса Орнштейна–Уленбека получены Дикситом и Пиндиком [42] в форме их дискретной модели:

$$\begin{aligned} E[x_t] &= \bar{x} + (x_{t-1} - \bar{x})e^{-\eta\Delta t}, \\ \text{Var}[x_t] &= \frac{\sigma^2}{2\eta} (1 - e^{-2\eta t}). \end{aligned}$$

Нельсон и Рамасвами [66] предложили подход, который может использоваться в широком диапазоне условий и который подходит для процесса Орнштейна–Уленбека. Их модель — простая биномиальная последовательность за  $n$  периодов продолжительности  $\Delta t$  с временным горизонтом  $T = n\Delta t$ , которая позволяет тогда построить рекомбинированное биномиальное дерево.

Рассматривая общую форму дифференциального уравнения для стохастического марковского процесса

$$dx = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dz,$$

где  $\mu(x, t)$  — дрейф или темп роста стохастического процесса, а  $\sigma(x, t)$  — параметр его изменчивости, Нельсон и Рамасвами получили модель, заданную следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}
x_t^+ &\equiv x + \sqrt{\Delta t} \sigma(x, t) && \text{(движение вверх),} \\
x_t^- &\equiv x - \sqrt{\Delta t} \sigma(x, t) && \text{(движение вниз),} \\
p_t &\equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta t} \frac{\alpha(x, t)}{\sigma(x, t)} && \text{(вероятность движения вверх),} \\
1 - p_t &&& \text{(вероятность движения вниз).}
\end{aligned}$$

Для процесса Орнштейна–Уленбека должны быть справедливы уравнения:

$$\alpha(x, t) = \eta(\bar{x} - x_t), \quad \sigma(x, t) = \sigma.$$

Хан и Дайер [51], а также Бастиан-Пинто, Брандао и Хан [30] использовали этот подход, чтобы смоделировать двумерные решетки, в которых по крайней мере одна из переменных следует возвращению к среднему. Однако в этой модели вероятность  $p_t$  может принимать значения больше 1. Это условие исправлено, подвергая пересмотру вероятности  $p_t$  (и поэтому  $1 - p_t$ ) в диапазоне от 0 до 1 следующим образом:

$$p \equiv \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\eta(\bar{x} - x)}{\sigma} \sqrt{\Delta t}, & \text{если } 0 \leq p_t \leq 1, \\ 0, & \text{если } p_t < 0, \text{ } p_t \text{ пересмотрена,} \\ 1, & \text{если } p_t > 1, \text{ } p_t \text{ пересмотрена.} \end{cases}$$

Подход Нельсона и Рамасвами [66] подобен подходу Кокса, Росса и Рубинштейна [41], т. к. дрейф математического ожидания процесса регулируется значением  $p$ , которое в этом случае меняется в зависимости от  $x$ .

Эта модель может быть легко приспособлена к симметричной модели, подобной описанной для моделирования GBM. Бастиан-Пинто, Брандао и Озорио [29] используют подход, предложенный Халлом и Уйатом [55, 56], как описано у Цлевлоу и Стрикленда [39] и у Халла [53], для случая модели тринomialного дерева MR-процесса. В-первых, Бастиан-Пинто, Брандао и Озорио [29] определяют симметричную совокупную решетку, которая моделирует арифметический процесс Орнштейна–Уленбека с длительным сроком, средним, равным нулю:  $\bar{x}^* = 0$ , и начальным значением, равным нулю:  $x_0^* = 0$ .

В узлах этой решетки ценность будет равна  $x_t^*$ . Математические ожидания  $x_t^*$  для модели Орнштейна–Уленбека добавляются к ценности в узлах в каждый период, используя реальное долгосрочное среднее число процесса  $\bar{x}$  и реальное начальное значение  $x_0$ . Следовательно, эта решетка ценностей  $x_t$  используется, чтобы получить решетку ценового процесса  $S_t$  с логнормальным распределением, определенного как  $S_t = e^{x_t}$  и  $x_t = x_t^* + x_t^*$ .

Используя то же самое построение, как в случае симметричной решетки GBM, и параметры модели Нельсона и Рамасвами [66], имеем следующие соотношения для совокупной симметричной решетки:

$$\begin{aligned} x^{*,+} &= x^* + \sigma\sqrt{\Delta t}, \\ x^{*,-} &= x^* - \sigma\sqrt{\Delta t}, \\ p_{x_t^*} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\eta(-x_t^*)}{\sigma} \sqrt{\Delta t}. \end{aligned}$$

Последнюю оценку также необходимо пересмотреть в диапазоне  $[0, 1]$ , если зависящее от оценок  $x_t^*$  значение  $p_{x_t^*}$  выходит за пределы этого диапазона. Поэтому Бастиан-Пинто, Брандао и Озорио [29] используют следующее выражение:

$$p_{x_t^*} = \max \left\{ 0, \min \left\{ 1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\eta(-x_t^*)}{\sigma} \sqrt{\Delta t} \right\} \right\}.$$

Бастиан-Пинто, Брандао и Хан [30] используют также небольшое изменение этого подхода, который не предполагает пересмотра и представлен в следующем выражении:

$$p_{x_t^*} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\eta(-x_t^*)}{\sqrt{\eta^2(-x_t^*)^2 \Delta t + \sigma^2}} \sqrt{\Delta t}.$$

Но эта модель возвращает нас к несколько завышенным ценностям вариации по причине самой природы построения решетки. Указанные авторы используют этот подход вместе с симметричной моделью, рассмотренной здесь, и моделируют реальный опцион на переключение. Хотя эта модель без пересмотра интересна и применима, Бастиан-Пинто, Брандао и Озорио [29] используют подход, подвергающий пересмотру вероятности вследствие, очевидно, более высокой

точности их модели. Оценка  $x$  после  $i$  движений вверх и  $j$  движений вниз будет для  $t = (i + j)\Delta t$  следующей:

$$\begin{aligned} x_{(i,j)} &= \bar{x} + (x_0 - \bar{x})e^{-\eta(i+j)\Delta t} + \underbrace{(i - j)\sigma\sqrt{\Delta t}}_{x^*} = \\ &= \bar{x} \left(1 - e^{-\eta(i+j)\Delta t}\right) + x_0 e^{-\eta(i+j)\Delta t} + \underbrace{(i - j)\sigma\sqrt{\Delta t}}_{x^*}. \end{aligned}$$

Подход к построению симметричной решетки показан на рис. 2 и 3.

На рис. 4 мы видим представление на 15 периодов (с  $\Delta t = 0,25$ ) сочетания указанных выше схем построения решеток (все в геометрической форме) [29].

Внимание должно быть сосредоточено на ценности  $\bar{x}$ : это не непосредственно натуральный логарифм уровня равновесия (среднего) смоделированной цены:  $\bar{S}$ . Применяем лемму Ито к дифференциальному уравнению модели геометрического возвращения к среднему:

$$dS = \eta (\ln \bar{S} - \ln S) S dt + \sigma S dz.$$

В итоге имеем:

$$\bar{x} = \ln \bar{S} - \frac{\sigma^2}{2\eta}.$$

Симметричная решетка для геометрического MR-процесса, определенного как  $S_t = e^{x_t}$ , получена непосредственным преобразованием оценок  $x_{(i,j)}$  в  $S_{(i,j)}$ . Бастиан-Пинто, Брандао и Озорио [29] отмечают, что в этой симметричной решетке поправка на нейтральность к риску задана в уравнении математического ожидания процесса, меняя ценность  $x_t$  на

$$x_{(i,j)} = \left(\bar{x} - \frac{\lambda_x}{\eta}\right) \left(1 - e^{-\eta(i+j)\Delta t}\right) + x_0 e^{-\eta(i+j)\Delta t} + \underbrace{(i - j)\sigma\sqrt{\Delta t}}_{x^*},$$

где  $\lambda_x$  — премия за риск переменной  $x$ ;

$\frac{\lambda_x}{\eta}$  — соответствующая нормализованная премия за риск.

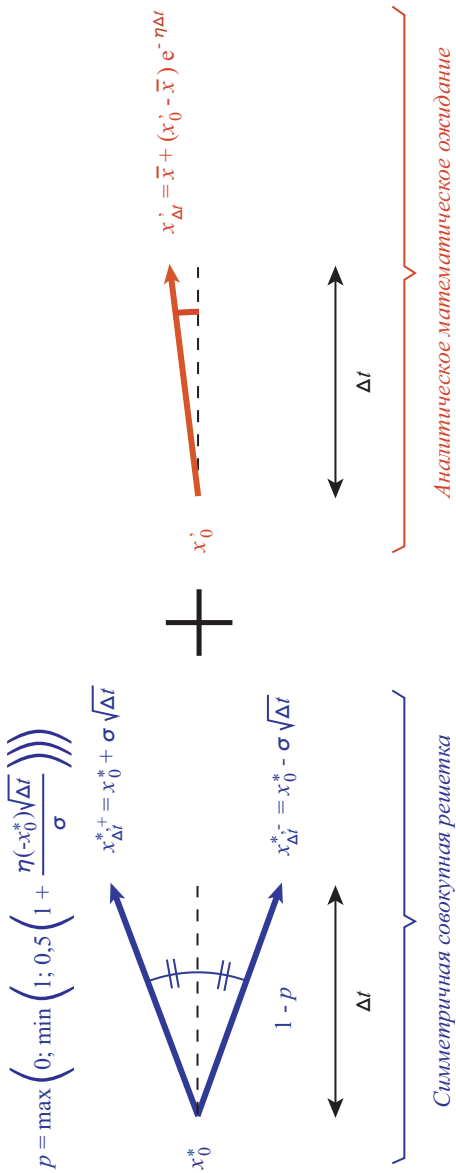


Рис. 2. Шаги построения симметричной решетки — Орнштейн–Уленбек

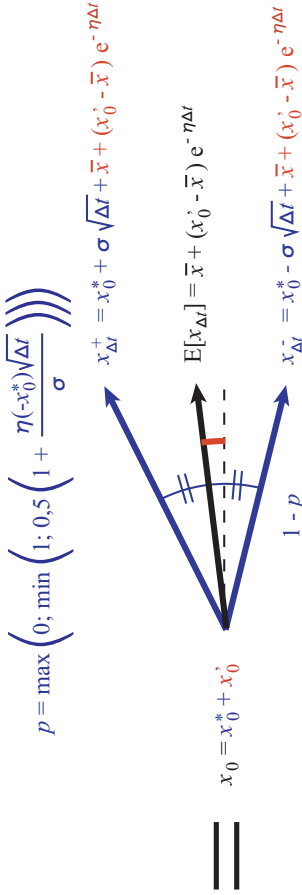


Рис. 3. Симметричный наклон решетки — Орнштейн–Уленбек



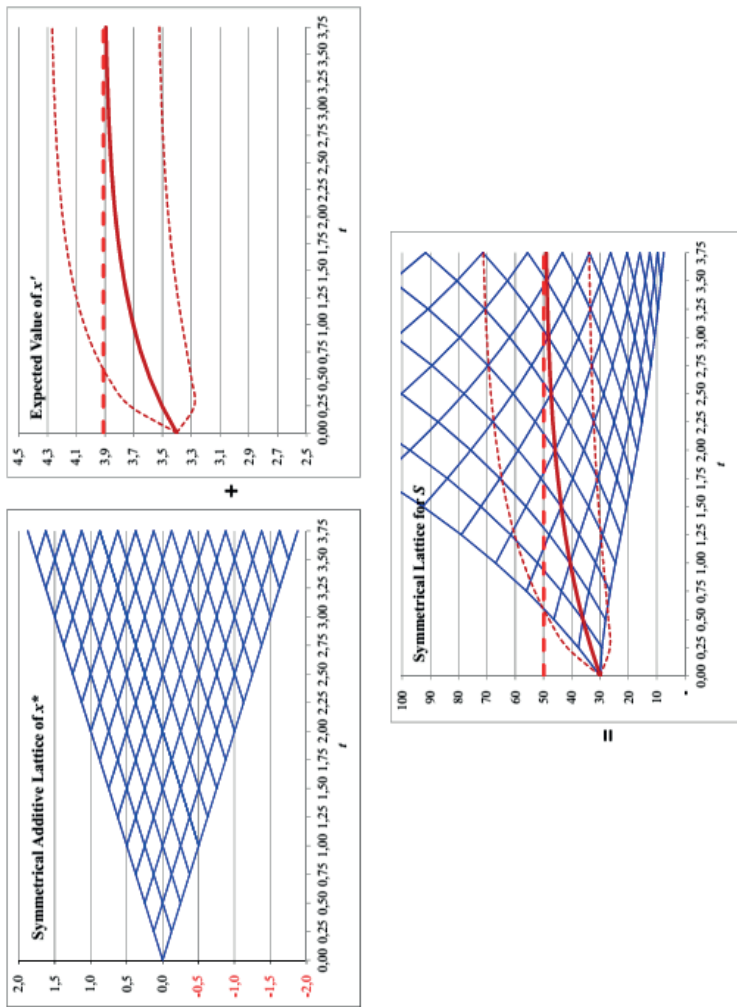


Рис. 4. Комбинация симметричной решетки и математического ожидания вверх и вниз в 95%-м доверительном интервале

Это уточнение, необходимое чтобы преобразовать MR-процесс в риск-нейтральный процесс, является также более простым, чем под-вергаемая пересмотру модель, которая требует, чтобы пересматри-вались вероятности переходов на протяжении всей решетки [29].

Однако не стоит забывать, что при этом оценка волатильности — часто наиболее трудная задача в оценке финансового опциона. Это бросает новый вызов теории реальных опционов, т. к. базисный актив известного процесса не всегда поддается обработке и не остается постоянной волатильность на протяжении инвестиционного периода. Волатильность имеет тенденцию уменьшаться во время реализации многих инвестиционных проектов пока собираются новая информация и знания. Применяемый метод оценки тоже должен это учитывать. С другой стороны, практический метод оценки должен также быть здравым и интуитивно привлекательным. Хаатела [50] составил рекомбинирующую триномиальную решетку с целью применения метода оценки стоимости реального опциона (ROV) с изменяющейся волатильностью. Триномиальное дерево предполагает как его прямую параметризацию, так и применение метода решетки для того, чтобы оценить инвестиции с несколькими взаимодействующими параллельными и последовательными реальными опционами.

В отличие от финансовых опционов, рыночная ценность активов, лежащих в основе стоимости опциона, в ROV вначале далеко не всегда известны, что больше напоминает оценку с неопределенностью. Это неопределенность второго порядка, или двусмысленности, а это означает, что основная стоимость активов вначале не известна. Затем, после сбора информации о рынке и собственной деятельности в течение долгого времени могут быть сделаны более надежные оценки ожидаемой стоимости инвестиций и ее волатильности. В результате волатильность имеет тенденцию к снижению с течением времени во многих инвестиционных проектах. Например, знание о продажах продукта для более раннего периода времени, вероятно, улучшит прогнозные оценки общего спроса.

В то время как волатильность изменения характеристик финансовых опционов можно считать гладкой, для реальных опционов ситуация часто другая. Обычно новые поступления информации, особенно в случае инвестиций в НИОКР, является редким случаем,

и некоторые из неопределенностей известны только после того, как уже собственно проделана работа. Вместо того, чтобы принять во внимание непрерывные колебания в зависимости от геометрического броуновского движения, Уиллмер [82] предлагает использовать простой скачкообразный процесс, а Шварц и Мун [70] применяют смешанные скачки процесса диффузии. Тем не менее, даже в одномерном еще зависящем от времени случайном процессе он может обеспечить реалистичный подход к оценке. Управленческие решения, связанные с проектами, как правило, исследуются не непрерывно, а лишь в определенные периоды времени. Опционные решения производятся главным образом в определенные моменты времени, когда новая информация о рынках и собственной деятельности собрана и проанализирована. В результате, инвестиции могут рассматриваться как поэтапные, или как последовательность опционов. Более точное многомерное моделирование базисных активов, если это вообще возможно, по этой причине не является необходимым между точками принятия решения, если стоимость базисных активов вычислена корректно в момент принятия решения с целью принятия оптимального решения о реализации опциона. Из-за этого дискретный подход лучше, чем непрерывный в принятии решений в условиях одномерного моделирования неопределенности и более соответствует реальности.

Изменение волатильности в стандартной биномиальной решетке является проблематичным, поскольку снижение волатильности означает, что дерево не будет рекомбинировать. Без рекомбинации дерево, составленное для анализа реальных опционов, не представляется возможным. Гаффри [47] предлагает некоторую модификацию для биномиального дерева, такую, что она позволяет менять волатильность. Размер движений вверх и вниз и соответствующие им вероятности перехода являются постоянными на протяжении всего дерева, но периоды времени имеют разную длину. При высокой волатильности сроки короткие, так что переменная состояния часто меняется как стандартное отклонение. Когда волатильность ниже, сроки длиннее и изменения в переменной состояния встречаются реже. Это биномиальное дерево представлено на левом рис. 5.

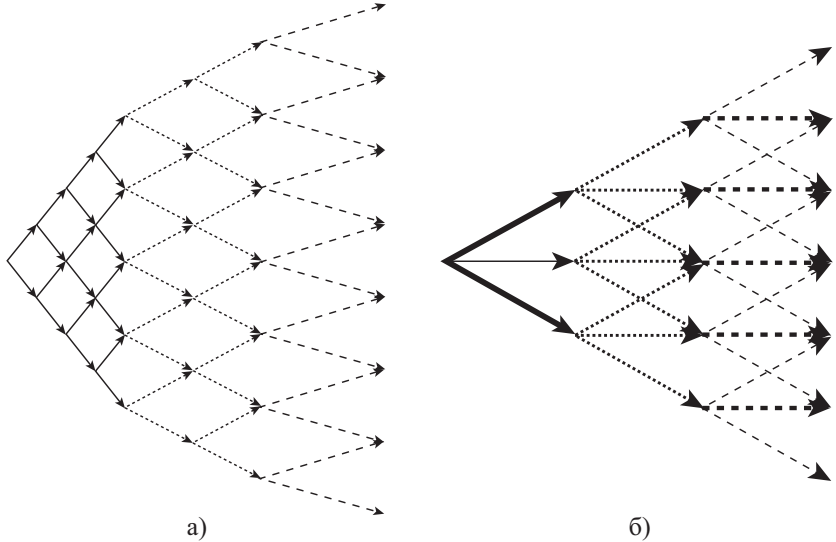


Рис. 5. Сравнение биномиального дерева Гаффри [47], а и триномиального дерева Хаателы [50], б. Толщина стрелки в триномиальном дереве иллюстрирует вероятность перехода между узлами дерева

Метод, предложенный Гаффри [47], является достаточно простым дополнением к основам CRR-биномиального дерева и, таким образом, подходит для практиков. Одним из недостатков этого подхода является то, что из-за изменения длины периода времени, даты исполнения опциона не обязательно совпадают именно с фактическими моментами принятия решений. При наличии нескольких различных периодов времени изменения в какой-либо одной волатильности при моделировании требует настройки даты и соответствующих функций для того, чтобы узлы были корректными. Длина временных шагов должна быть достаточно мала всюду в дереве для того, чтобы регулировка была возможной. Это также необходимо для того, чтобы вероятности переходов не стали отрицательными в любом месте дерева. (Известна также проблема, связанная со стандартным [41] биномиальным деревом.) Другим недостатком является то, что в слу-

чае очень малой или даже несуществующей волатильности в течение некоторого периода времени любое движение отклонения вверх или вниз от ожидаемого значения в будущем — увеличение по безрисковой ставке — сделает построения дерева невозможным [50].

Триномиальное дерево, представленное Хаатела [50], построено одновременно при выборе таких параметров, которые устанавливают разумное пространство состояний, имея в виду разумные вероятности перехода между узлами. Волатильность изменения моделируются с изменением вероятности перехода в то время как пространство состояний триномиальных деревьев регулярно и имеет фиксированное количество моментов времени и уровней цен на базисные активы. Это проиллюстрировано на правом рис. 5, где ширина стрелки в триномиальном дереве отражает риск-нейтральные вероятности перехода вверх, по центру и вниз. В самом начале, когда волатильность выше, вероятность движения вверх или вниз больше (толстые стрелки), чем вероятность перехода на среднее значение (тонкие стрелки). Позже, когда волатильность уменьшилась, вероятность переезда в середине узла больше (толстая стрелка) и вероятности для движений вверх и вниз (тонкие стрелки) меньше.

Параметризации, представленные Хаатела [50] для триномиального дерева, являются точным решением как для ожидаемого среднего значения, так и для дисперсии, вместо решения только для дисперсии. В отличие от Бойла [33], вероятности перехода также всегда остаются стабильными для всех дисперсионных значений параметров  $\lambda > 1$ . Кроме того, рекомбинация установлена так, что  $u \cdot d = d \cdot u = m^2 = e^{2r\Delta t}$ , потому что в противном случае повышение дискретности системы не будет приводить к небольшой или даже нулевой волатильности. Триномиальное дерево всегда стабильно независимо от длины шага во времени. Уравнения для описания стохастических процессов движений вверх и вниз являются более точными, даже с более длинными шагами во времени. Это необходимо потому, что временные шаги для оценки реального опциона выбираются, исходя из управленческой практичности, так, чтобы они были длиннее, чем это обычно бывает в финансовых опционах.

Хаатела [49] представил также параметризации для триномиального дерева с изменением волатильности на основе моделирования

денежных потоков. Таким образом, его подход распространяется также на исследования Коупленда и Антикарова [40], Герата и Парка [52], Муна [63, 64], Брандао [34, 35], Годинхо [45] и Хаателы [49], применяя метод Монте-Карло к денежным потокам при сведении в многомерный стохастический процесс нескольких коррелирующих переменных в низкоразмерном (одномерном) геометрическом процессе броуновского движения. Параметр волатильности  $\sigma$  базисного актива затем оценивается путем расчета стандартного отклонения моделируемого распределения вероятности доходности. Аналогично Годинхо [45] и Хаатела [49], денежные потоки и волатильность реализации зависят от ранних реализаций денежного потока, и обычный метод наименьших квадратов регрессионного подхода используется для оценки стоимости перспективе с соответствующей волатильностью. В отличие от других типов моделирования денежных потоков на основе сводных подходов, моделирование, представленное Хаатела [50], позволяет изменять волатильность при сохранении решетчатой рекомбинации. Кроме того, в то время как большинство моделирований денежных потоков базируются на методе, который обычно считает, что базовый актив следует геометрическому броуновскому движению, настоящие моделирования и параметризации также позволяют использовать перемещенный процесс диффузии Рубинштейна [69] по аналогии с Камара [36], Камара и Ченг [37] и Хаатела [48].

Итак, применение биномиальной CRR-модели [41], пусть даже и уточненной Ябуром, Крамином и Янгом [57] и Халлом [54] (параграф 3.2), обладает определенным набором недостатков, связанных прежде всего с ситуацией изменения волатильности бизнеса во времени [50]. Однако есть также существенный недостаток, заключающийся в том, что в случае очень малой или даже несуществующей волатильности в течение некоторого периода времени любое движение отклонения цены базисного актива вверх или вниз от ожидаемого значения в будущем, т. е. увеличения по безрисковой ставке ( $S_{t+1,m} = S_{t,m} e^{r\Delta t}$ ), сделает построение биномиального дерева невозможным [50].

Триномиальные деревья являются другим дискретным представлением движения цены базисного актива, аналогичным биномиальным деревьям. Триномиальные решетки имеют три параметра скач-

ков  $u$ ,  $m$  и  $d$  и три соответствующие им вероятности  $p_u$ ,  $p_m$  и  $p_d$ . В течение этого времени шаг цены актива может перейти к одному из трех узлов: с вероятностью  $p_u$  в верхний узел до значения  $S_u$ , с вероятностью  $p_m$  к середине узла до значения  $S_m$  и в нижний узел до значения  $S_d$  с вероятностью  $p_d$ . Мы предполагаем, что сумма вероятностей равна единице, поэтому мы устанавливаем  $p_m = 1 - p_u - p_d$ . В конце каждого шага во времени есть пять неизвестных параметров: две вероятности  $p_u$  и  $p_d$  и три узла цены  $S_u$ ,  $S_m$  и  $S_d$ .

При этом небольшая модификация, предложенная Ябуром, Крамином и Янгом [57] и Халлом [54], заключается в использовании более точной оценки отклонения в соответствии с уравнением

$$\sqrt{e^{\sigma^2 \Delta t} - 1} \approx \sigma \sqrt{\Delta t}$$

вместо  $\sigma \sqrt{\Delta t}$ . После этих изменений, согласно точке зрения Хаателы [50], построение параметра триномиальной решетки приводит к улучшенной общей форме параметризации для всех вероятностей переходов и размеров скачков  $u$ ,  $m$  и  $d$  в соответствии с уравнениями:

$$p_u = \frac{m^2(V - 1)}{u^2 + md - um - ud}, \quad (1)$$

$$p_d = p_u \frac{m - u}{d - m}, \quad (2)$$

$$p_m = 1 - p_u - p_d, \quad (3)$$

$$u = e^{r\Delta t + \sqrt{e^{(\lambda\sigma)^2 \Delta t} - 1}}, \quad (4)$$

$$d = e^{r\Delta t - \sqrt{e^{(\lambda\sigma)^2 \Delta t} - 1}}, \quad (5)$$

$$m = e^{r\Delta t}, \quad (6)$$

$$V = e^{\sigma^2 \Delta t}, \quad (7)$$

где оправданное значение дисперсионного параметра  $\lambda$  составляет 1,12 [50]. Это делает пространство состояний плотным и обеспечивает достаточно хорошие вероятности переходов между узлами триномиальной решетки (дерева).

Движения вверх (4) и вниз (5), которые определяют пространство состояний, рассчитываются в соответствии с наибольшей волатиль-

ностью в течение инвестиций так, что  $\sigma = \max \sigma_i$ . Эти значения  $u$  и  $d$  используются для всего пространства состояний в течение всех периодов времени независимо от изменения волатильности. Тем не менее, вероятности перехода, вычисленные в соответствии с (1)–(3), справедливы только для периода времени с наивысшей волатильностью.

Имея уравнения (1)–(3) для  $p_u$ ,  $p_d$  и  $p_m$  за период времени с высокой волатильностью, можно вычислить вероятности перехода  $p_u^i$ ,  $p_d^i$  и  $p_m^i$  для других периодов времени  $i$  [50] как

$$p_u^i = p_u \left( \frac{\sigma_i}{\sigma_{\max}} \right)^2, \quad (8)$$

$$p_d^i = p_d \left( \frac{\sigma_i}{\sigma_{\max}} \right)^2, \quad (9)$$

$$p_m^i = 1 - p_u^i - p_d^i. \quad (10)$$

В результате имеем параметризацию для построения рекомбинирующего тринomialного дерева с изменяющейся волатильностью. Использование такого построения решетки похоже на обычный процесс решетки. После того, как базисные пути изменения стоимости активов построены в соответствии с (4) и (5), в модель вводятся функции выигрыша опциона. Тогда, опционное дерево оценивается, начиная с конца дерева и работая назад, используя динамическое программирование, в соответствии с риск-нейтральной оценкой и риск-нейтральными вероятностями (8)–(10). Значение параметра  $V_t$  известно в конце в момент времени  $T$ , с ценой исполнения  $I$ , и для колл-опциона стоимость  $V_t = \max\{S_t - K, 0\}$ , а для пут-опциона —  $V_t = \max\{K - S_t, 0\}$ . Из-за риск-нейтрального предположения, стоимость в каждом внутреннем узле может быть рассчитана как ожидаемое значение в момент времени  $t$ , дисконтированное по ставке  $r$  в течение одного периода времени, т. е.  $V_{t-1}$ , в соответствии с

$$S_{t-1} = \frac{p_u S_{u,t} + p_m S_{m,t} + p_d S_{d,t}}{e^{r\Delta t}}. \quad (11)$$

Наконец, работая обратно через все узлы, получаем стоимость опциона в нулевой момент времени.



Волатильность базового процесса может быть не известна в то время как стандартное отклонение может быть доступно. (При использовании метода моделирования денежных потоков мы иногда можем наблюдать только стандартное отклонение и на основе этого знания определить обоснованный случайный процесс с правильными значениями параметров.) В соответствии с мультипликативным геометрическим броуновским движением, стандартное отклонение величины  $S$  с течением времени устанавливается в соответствии с уравнением

$$s = Se^{rt} \sqrt{e^{\sigma^2 t} - 1} = Se^{rt} \sqrt{e^{\sum \sigma_i^2 t_i} - 1}.$$

Таким образом, если стандартное отклонение процесса базисного актива в определенные моменты времени известно, можно вычислить среднюю волатильность для каждого периода времени. С начала процесса каждое  $\sigma_i$  может быть рассчитано согласно уравнению

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\ln \left[ \left( \frac{s_i}{S_0 e^{rt}} \right)^2 + 1 \right] - \sum_{i=0}^{i-1} \sigma_i^2 t_i}{t_i}}. \quad (12)$$

Если стандартное отклонение также неизвестно, оно должно быть найдено приближенно. Некоторые авторы предложили различные варианты применения метода Монте-Карло для расчета денежного потока, чтобы оценить волатильность. Существующие симуляции денежных потоков, основанные на методах оценки волатильности, — это логарифмические подходы оценки стоимости согласно Коупленду и Антикарову [40], а также Герату и Парку [52], условно логарифмические подходы согласно Брандао, Дайеру и Хану [33], двухуровневые симуляции и регрессионные методы наименьших квадратов согласно Годинхо [45]. Все эти методы опираются на ту же основную идею. Симуляция Монте-Карло денежных потоков объединяет высокомерный стохастический процесс нескольких взаимосвязанных переменных низкой размерности (одномерный случай) геометрического броуновского процесса движения. Параметр волатильности  $\sigma$  базисного актива оценивается путем расчета стандартного отклонения моделируемого распределения вероятности доходности.

Одно жизнеспособное расширение рассмотренной триномиальной решетки — это изменение, которое принято считать геометрическим броуновским движением с процессом диффузии перемещения, предложенное Рубинштейном [69]:

$$dS = \mu S_\theta dt + \sigma_{dd}(S_\theta + \theta)dW, \quad (13)$$

где  $\sigma_{dd}$  — волатильность диффузии перемещения;

$\theta$  — параметр переключения.

Эволюция объекта  $S$  в (13) такова, что во временном горизонте  $T$  в риск-нейтральном мире она задается соотношением

$$S_t = (S_{\theta,0} + \theta)e^{(rt + \sigma_{dd}\sqrt{t}z)} - \theta, \quad z \sim N(0, 1).$$

Соответствующее исходное распределение активов является скошенным логнормальным распределением. Взаимосвязь между волатильностью  $\sigma$  и  $\sigma_{dd}$  выглядит следующим образом:

$$S_0\sigma = (S_{\theta,0} + \theta)\sigma_{dd}.$$

Диффузионный процесс перемещения при различных значениях  $S_\theta$  и  $\theta$  допускает моделирование стохастических процессов, которые находятся между мультипликативным (логнормальным) и аддитивным (арифметическим) процессами. Он обеспечивает также хорошее приближение процесса квадратного корня, а также постоянной эластичности дисперсии процессов в определенном диапазоне и процессов экстремальных значений. Он также допускает отрицательные стоимости базисных активов, т. е. имущества, которое было просчитано Камарой [36] и Хаателой [48].

Моделирование  $\sigma_{dd}$  на основе симуляции денежных потоков делается совершенно аналогично, как и в случае обычного геометрического броуновского движения. Начиная с  $S_1$  (оценивается как  $PV_1$ ), мы можем подогнать оценочные функции регрессий стоимостей под скошенное логнормальное распределение (что называется перемещенным логнормальным распределением). (Все общие установки симуляции распространенного программного обеспечения используют скошенное логнормальное распределение в качестве альтернативы. Это включено в последние версии программного обеспе-

чения *Palisade's @ Risk* и *Oracle Crystal Ball* в *MS Excel Add-In-симулирования*.) Это дает нам описание в три параметра логнормального распределения, где параметрами являются  $S_{\theta,1}$ ,  $\theta_1$  и стандартное отклонение величины  $S_1$  в момент времени  $t_1$ . Оба  $S_{\theta,1}$  и  $\theta_1$  дисконтируются до времени  $t_0$ . Затем, используя  $S_{\theta,0}$  вместо  $S_0$  в уравнении (12), мы можем вычислить  $\sigma_{dd,1}$ . Волатильности перемещений для других периодов времени ( $\sigma_{dd,t}$ ) рассчитываются с использованием того же уравнения с теми же изменениями в параметрах. Размеры скачков  $u_{dd}$  и  $d_{dd}$  рассчитываются с использованием  $\sigma_{dd}$ , и триномиальное дерево строится с помощью  $S_{dd,0}$  в качестве начального значения для стохастического процесса изменения базисного актива. Тогда в каждом узле из стоимости вычитается  $\theta_0 e^{rt}$ . (Простой альтернативой является вычитание  $\theta_0 e^{rt}$  только из значений конечных узлов, а затем расчет каждого внутреннего узла более ранних периодов времени в соответствии с уравнением (11).) Другой альтернативой является вычитание  $\theta_0 e^{rt}$  только из терминальной стоимости, а затем расчет каждого внутреннего узла ранних периодов времени в соответствии с уравнением (11). В результате мы получаем рекомбинирующее триномиальное дерево, которое позволяет учесть изменения волатильности, а также принять во внимание стоимость базисного актива. Диффузионный процесс перемещения кроме всего прочего допускает наличие отрицательных стоимостей базисного актива.

### 1.3. Стохастическое доминирование в инвестиционном анализе

Для принятия решения о рискованных альтернативах можно использовать теорию ожидаемой полезности [4]. Существенное условие применения этой концепции состоит в том, что лицо, принимающее решение, (ЛПР) должно “выявить”, т. е. “обнаружить” свою функцию полезности  $U(x)$ . Только в этом случае можно выбрать альтернативу, которая максимизирует ожидаемую полезность.

Если отсутствует готовность к выявлению функции полезности, то тогда в определенных условиях все-таки можно углубить анализ, используя концепцию стохастического доминирования [4]. В рамках

этой концепции нам требуется гораздо меньше знаний о свойствах функции полезности ЛПР. Существуют разные степени стохастического доминирования. Сначала мы ограничимся первыми двумя степенями стохастического доминирования, несмотря на то, что при определенных условиях разумно допустить наличие большего числа степеней. Но необходимо всегда учитывать, что эта концепция может “работать” лишь для определенных классов функции полезности.

### Стохастическое доминирование первого порядка

**Условия.** В экономических моделях, как правило, предполагается ненасыщаемость потребностей ЛПР. Иногда этого условия достаточно для упорядочения рискованных альтернатив. Если мы хотим формализовать ненасыщаемость, касающуюся результата  $x$ , который может интерпретироваться как денежный поток, доходность и т. д., то это можно сделать следующим образом:

$$\delta > 0 \implies U(x + \delta) > U(x).$$

Если функция полезности непрерывно дифференцируема, то ненасыщаемость можно выразить и в форме

$$U'(x) > 0.$$

Функция полезности возрастает строго монотонно. Предельная полезность строго положительна.

Введем следующее определение: *альтернатива  $A$  доминирует над альтернативой  $B$  по критерию стохастического доминирования первого порядка тогда и только тогда, когда для каждой строго монотонно возрастающей функции полезности  $A$  лучше, чем  $B$ .* Стохастическое доминирование первого порядка (first degree stochastic dominance, FSD) формализованно обозначается как  $\succeq_{\text{FSD}}$ .

Если исходить из того, что значения прибыли обеих альтернатив, которые здесь необходимо отличать друг от друга, распределены непрерывно, то тогда мы предполагаем ситуацию, показанную на рис. 6. Очевидно, что график распределения вероятностей  $F(x)$  альтернативы  $A$  нигде не лежит выше функции  $G(x)$  альтернативы  $B$  или

$$\text{для всех } x \in [\underline{x}, \bar{x}]: G(x) - F(x) \geq 0. \quad (14)$$

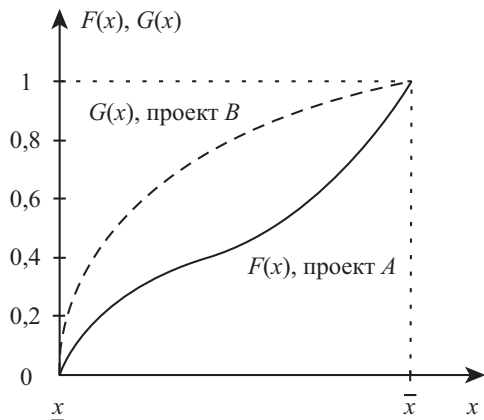


Рис. 6. Стохастическое доминирование первого порядка (распределения вероятностей)

**Правило FSD.** Теперь отметим, что  $A$  по критерию стохастического доминирования первого порядка только тогда не хуже, чем  $B$ , когда выполнено это условие. *Каждый индивидuum, максимизирующий ожидаемую полезность при  $U'(x) > 0$ , предпочитает  $A$  по сравнению с  $B$  только тогда, когда  $G(x) \geq F(x)$  для любых  $x$ . Или:*

$$G(x) - F(x) \geq 0 \text{ для } \forall x \iff A \succeq_{\text{FSD}} B.$$

Рассмотрим формализованное доказательство данного тезиса [4].

**Д о к а з а т е л ь с т в о**

Для этой цели мы исходим из того, что все результаты находятся в интервале  $(x, \bar{x})$ . Тогда должны соблюдаться равенства  $F(\bar{x}) = G(\bar{x}) = 1$  и  $F(x) = G(x) = 0$ . Если допустить, что  $A \succeq B$ , то тогда, в соответствии с концепцией ожидаемой полезности, должно иметь место:

$$E[U(x_A)] - E[U(x_B)] \geq 0.$$

Подстановка функции плотности распределения приведет к следующему:

$$\int_{\underline{x}}^{\bar{x}} U(x)f(x) dx - \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} U(x)g(x) dx \geq 0, \quad \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} U(x)(f(x) - g(x)) dx \geq 0.$$

Интегрируя по частям, получим

$$U(x)[F(x) - G(x)] \Big|_{\underline{x}}^{\bar{x}} - \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} U'(x)(F(x) - G(x)) dx \geq 0.$$

Поскольку  $F(\bar{x}) = G(\bar{x}) = 1$  и  $F(\underline{x}) = G(\underline{x}) = 0$ , имеем:

$$\int_{\underline{x}}^{\bar{x}} U'(x)(G(x) - F(x)) dx \geq 0. \quad (15)$$

Это неравенство, очевидно, выполняется при положительной предельной полезности, если оказывается соблюденным условие (14). Тогда (14) достаточно для  $A \succeq_{\text{FSD}} B$ . От доказательства того, что это условие является необходимым, мы откажемся.

Правило FSD доказано.

Между прочим можно также показать, что справедливо следующее:

$$G(x) - F(x) \geq 0 \text{ для } \forall x \implies E_F[x] \geq E_G[x].$$

В вербальной формулировке, критерии стохастического доминирования первого порядка означают, что математическое ожидание случайной величины  $x$  с функцией распределения  $F$  по меньшей мере равно математическому ожиданию величины  $x$  с функцией распределения  $G$ . Правда, обратное утверждение не обязательно будет верным. Следовательно, из  $E_F[x] \geq E_G[x]$  *не следует*, что  $A \succeq_{\text{FSD}} B$ . Поэтому стохастическое доминирование первого порядка по сравнению с правилом математического ожидания позволяет делать более

осторожные оценки. Оно имеет более общий характер, т. к. не противоречит никакой разумной функции полезности. Одновременно оно лишь очень ограниченно применимо, т. к. в большинстве случаев ни  $G(x) - F(x) \geq 0$  для *каждого*  $x$ , ни  $F(x) - G(x) \geq 0$  для *каждого*  $x$  не выполняется.

## Стохастическое доминирование второго порядка

**Условие.** Прежде лишь предполагалось, что потребности ЛПП не могут быть насыщаемыми, теперь мы пойдем дальше. Предположим, что, кроме того, ЛПП является строго не расположенным к риску. В этом случае вторая производная функции полезности должна быть отрицательной [4]. Это означает, что

$$U'(x) > 0 \quad \text{и} \quad U''(x) < 0.$$

Мы не будем вводить дальнейшие ограничения, например, допущения относительно степени нерасположенности к риску или изменения абсолютной или относительной нерасположенности к риску при возрастающем благосостоянии. Но во многих случаях это условие достаточно для упорядочения альтернатив в случае неопределенности.

Введем следующее определение: *альтернатива А доминирует над альтернативой В по критерию стохастического доминирования второго порядка, если для каждой функции полезности, удовлетворяющей (15), А лучше, чем В.* Стохастическое доминирование второго порядка (second degree stochastic dominance, SSD) формализованно обозначается как  $\succeq_{\text{SSD}}$ .

Мы снова будем исходить из условия непрерывности распределений вероятностей и теперь рассмотрим ситуацию, изображенную на рис. 7. Область, обозначенная знаком плюс, слева от точки пересечения функций распределения значительно больше области со знаком минус справа от этой точки. Если вычислить интеграл разности  $G(x)$  и  $F(x)$ , то получим функцию, которая ни в одной точке не принимает отрицательные значения (рис. 8). Следовательно, имеем

$$\text{для всех } x \in [\underline{x}, \bar{x}]: \int_{-\infty}^x [G(z) - F(z)] dz \geq 0. \quad (16)$$

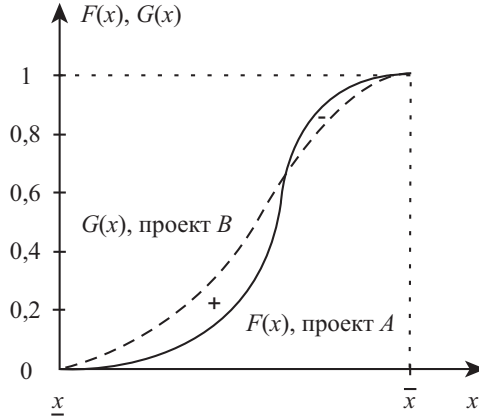


Рис. 7. Стохастическое доминирование второго порядка (распределения вероятностей)

**Правило SSD.** После этой “подготовительной работы” можно сформулировать критерий стохастического доминирования второго порядка: согласно этому критерию  $A$  только тогда не хуже  $B$ , когда интеграл разности распределений вероятностей ни в одной точке не отрицателен. Каждый индивидум, максимизирующий ожидаемую полезность при  $U'(x) > 0$  и при  $U''(x) < 0$ , предпочитает проект  $A$  проекту  $B$  только тогда, когда выполняется неравенство (16) для любых  $x$ . Или:

$$\int_{-\infty}^x [G(z) - F(z)] dz \geq 0 \text{ для } \forall x \iff A \succeq_{\text{SSD}} B.$$

Рассмотрим формализованное доказательство данного тезиса [4].

**Д о к а з а т е л ь с т в о**

Снова исходим из того, что все результаты находятся в интервале  $(\underline{x}, \bar{x})$ . Тогда  $F(\bar{x}) = G(\bar{x}) = 1$  и  $F(\underline{x}) = G(\underline{x}) = 0$ . Если теперь предположить, что  $A \succeq B$ , то тогда, согласно концепции ожидаемой полезности, должно соблюдаться



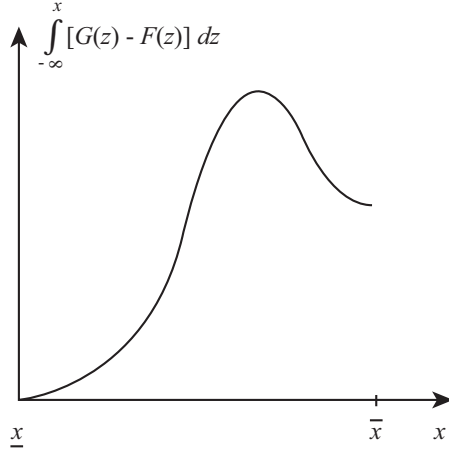


Рис. 8. Стохастическое доминирование второго порядка

$$E[U(x_A)] - E[U(x_B)] \geq 0.$$

Вычисление математических ожиданий приводит к следующему:

$$\int_{\underline{x}}^{\bar{x}} U(x)(f(x) - g(x)) dx \geq 0.$$

Интегрирование по частям, как мы уже знаем из предыдущего доказательства, позволяет получить следующий результат:

$$- \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} U'(x)(F(x) - G(x)) dx \geq 0.$$

Повторное интегрирование по частям дает

$$-U'(x) \int_{\underline{x}}^x [(F(z) - G(z))] dz \Big|_{\underline{x}}^{\bar{x}} + \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} U''(x) \int_{\underline{x}}^x [F(z) - G(z)] dz dx \geq 0.$$

Поскольку  $\int_{\underline{x}}^{\bar{x}} F(z) dz = \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} G(z) dz = 0$ , имеем:

$$-U'(x) \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} [(F(z) - G(z))] dz \Big|_{\underline{x}}^{\bar{x}} + \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} U''(x) \int_{\underline{x}}^x [F(z) - G(z)] dz dx \geq 0.$$

В случае стохастического доминирования второго порядка как первое слагаемое при  $U'(x) > 0$ , так и второе — при  $U''(x) < 0$  являются неотрицательными. Таким образом, (16) оказывается достаточным условием для  $A \succeq_{\text{SSD}} B$ . Доказательство того, что это условие является необходимым, нами опять не приводится.

Правило SSD доказано.

### Стохастическое доминирование третьего и высшего порядков

**Условия.** Для описания условий в общем виде, которые должны быть даны, чтобы концепцию стохастического доминирования можно было применить, вначале посмотрим на знак  $k$ -й производной функции полезности. При этом мы увидим следующую закономерность: при стохастическом доминировании *первого порядка первая производная* функции полезности должна была быть *положительной*, при стохастическом доминировании *второго порядка вторая производная* функции полезности имела *отрицательный знак*. Кажется, что здесь соблюдается закономерность, которая описывается при  $U^{(k)}(x)$  как  $k$ -я производная функции полезности через следующее правило:

$$U^{(k)}(x) = \frac{d^k U(x)}{dx^k} = \begin{cases} > 0, & \text{если } k \text{ нечетное,} \\ < 0, & \text{если } k \text{ четное.} \end{cases}$$

Данное правило является простым, но это не означает, что до него однозначно удастся додуматься на основе экономической интуиции, коль скоро мы должны анализировать третью и последующие производные функции полезности.

Не слишком сложно представить себе предпочтения индивидуума, функция полезности которого имеет положительную первую производную. Для такого индивидуума просто-напросто “больше лучше, чем меньше”. Следовательно, имеет место *ненасыщаемость его потребностей*. Кроме того, относительно легко показать, что индивидуум, функция полезности которого имеет отрицательную вторую производную, является строго *не расположенным к риску*.

Но как можно интерпретировать предпочтения ЛПР, о котором мы говорим, что  $k$ -я производная положительна (отрицательна), если  $k \geq 3$ ? При положительной третьей производной говорят иногда, что имеет место функция полезности с *убывающей абсолютной нерасположенностью к риску* [4]. Но интерпретации в отношении еще больших производных являются спорными или даже невозможными. Итак, не ясно, какие требования должны предъявляться в отношении ЛПР, если мы довольствуемся только большими производными.

**Систематизация критериев доминирования.** Выше мы видели, что альтернатива  $A$  по критерию стохастического доминирования *первого порядка* доминирует над альтернативой  $B$ , если действительно  $U'(x) > 0$  и  $G(x) - F(x) \geq 0$  для любых  $x$ , причем  $F(x)$  ( $G(x)$ ) означают непрерывное распределение вероятностей результатов  $A$  ( $B$ ). При условии же, что мы рассматриваем дискретные распределения, имеет место

$$F(x_j) = \sum_{l=1}^j q_l^A \quad \text{и} \quad G(x_j) = \sum_{l=1}^j g_l^B,$$

где  $g_l$  — вероятность, с которой альтернатива “обещает” прибыль величиной  $x_l$ .

Таким образом, критерий принимает форму

$$D_1(x_j) = G(x_j) - F(x_j) \geq 0 \quad \text{для} \quad \forall j \quad \implies \quad A \succeq B.$$

В случае стохастического доминирования *второго порядка* выбирается альтернатива  $A$ , если действительно  $U''(x) < 0$  и выполнен критерий  $\int_{-\infty}^x [G(z) - F(z)] dz \geq 0$ . Если и это рассмотреть в рамках случая дискретного распределения, то получим

$$D_2(x_j) = \sum_{l=1}^j [G(x_l) - F(x_l)] = \sum_{l=1}^j D_1(x_l) \geq 0 \text{ для } \forall j \implies A \succeq B.$$

Отсюда следует, что при последовательном продолжении для стохастического доминирования  $k$ -го порядка

$$D_k(x_j) = \sum_{l=1}^j D_{k-1}(x_l) \geq 0 \text{ для } \forall j \implies A \succeq B.$$

## Глава 2

# Синтетические финансовые инструменты

### 2.1. Модель управления фондовым риском с использованием синтетических стрэддлов

Управление фондовым риском прежде всего подразумевает управление портфелем акций и облигаций, находящихся в собственности инвестора. Несмотря на наличие всевозможных финансовых инструментов, снижающих такой риск, проблема до сих пор до конца не решена. Причина заключается в том, что большинство производных ценных бумаг требуют достаточно точного прогноза цен базисных активов, т. е. первичных ценных бумаг. В результате того, что, несмотря на математическую точность прогнозов, изменения цен все равно носят случайный характер, прогнозные оценки во многом зависят от того, кто делает прогнозы. В результате цены вторичных ценных бумаг, а также цены комбинаций различных бумаг до конца не могут отразить реальные будущие изменения их курсов и носят во многом субъективный характер.

Инвесторы, также делают свои прогнозы, которые позволяют составить им свое мнение о том, насколько цены вторичных финансовых инструментов соответствуют их представлениям о будущих инвестиционных возможностях. Поэтому инвесторы всегда будут искать новые варианты комбинирования первичных бумаг собственными способами с целью снижения своих рисков. При этом следует учитывать, что у инвесторов есть свои индивидуальные представления о наличии и величине таких рисков.

В качестве инвесторов на рынке ценных бумаг мы будем рассматривать финансовые учреждения региона, при этом предполагая, что такими инвесторами могут также быть другие юридические или физические лица.

Одним из наиболее классических производных финансовых инструментов является опцион. Традиционное построение опционного контракта предполагает определение цены исполнения опциона (*exercise, striking price*). Те опционы, которые уже обращаются на рынке ценных бумаг, уже имеют свою цену исполнения. Ее нельзя

изменить. Однако инвестор может быть не согласен, что цена исполнения будет, действительно, отражать реальную рыночную цену акции на момент исполнения опциона. Конечно, это является причиной покупки или продажи опционов на рынке. Но при этом инвестор сталкивается со следующим противоречием:

Опцион, имеющий определенную цену исполнения, имеет соответствующую рыночную цену, которая зависит как от риска, связанного с конкретной акцией, так и от цены исполнения. Таким образом, при соответствующих будущих колебаниях цены акции эти колебания в будущем в реальности будут происходить не относительно цены исполнения опциона, а относительно реальной прогнозируемой цены акции, если прогноз выполнен достаточно точно.

Данное противоречие способствует поиску инвесторами новых комбинаций первичных ценных бумаг, которые в большей степени отражают будущие прогнозы по оценкам этих же инвесторов.

В таких условиях мы предлагаем модель построения комбинации синтетических опционов, которые позволят снизить инвесторам свои фондовые риски.

В целях иллюстрации построения модели рассмотрим обыкновенные акции Сбербанка России. Динамика рыночной цены данной акции имеет характер, представленный в табл. 1 и на рис. 9 ([www.nettrader.ru](http://www.nettrader.ru)).

Таблица 1

**Динамика цены обыкновенных акций Сбербанка России (руб.)**

Дата	22.10.09	23.11.09	22.12.09	22.01.10	24.02.10
Цена	69,38	71,75	81,23	87,22	77,27
Дата	22.03.10	22.04.10	21.05.10	22.06.10	22.07.10
Цена	86,75	84,75	69,17	82,51	82,46
Дата	23.08.10	22.09.10	22.10.10	22.11.10	
Цена	78,17	83,12	102,55	99,78	

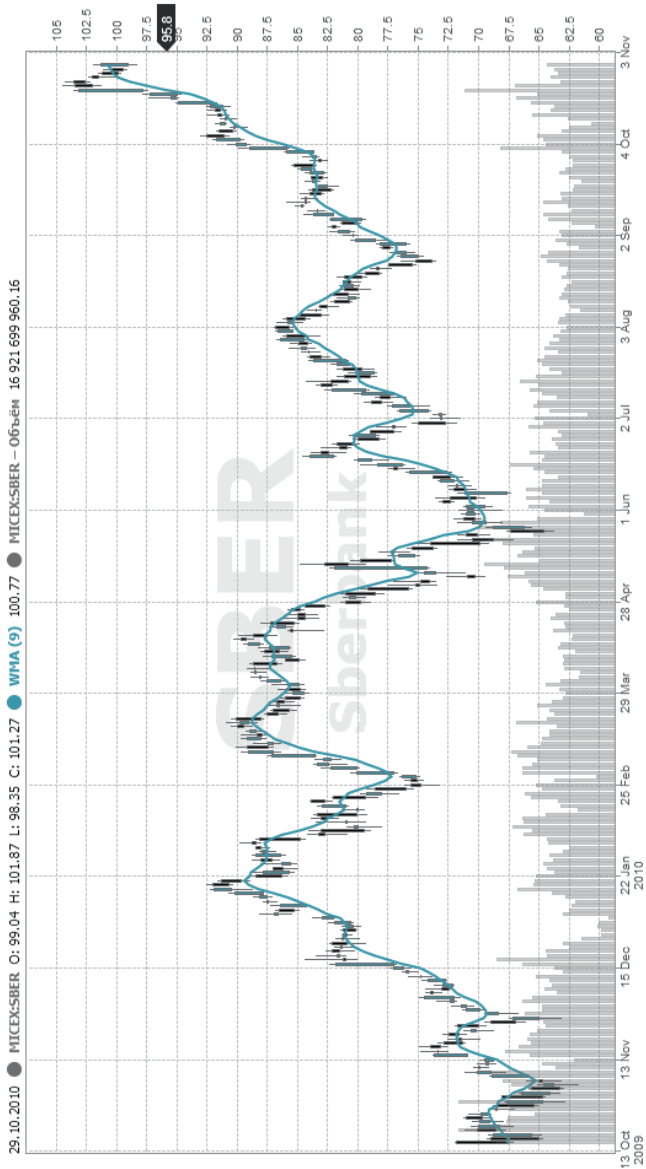


Рис. 9. Динамика цены обыкновенных акций Сбербанка России (руб.)

На основе данных табл. 1, будем составлять синтетический стрэддл, т. е. колл-пут опцион с одинаковой ценой исполнения (ценой “страйк”), используя для этого биномиальную модель [4, 41]. Ставшая уже классической, модель Блэка–Шоулза [32] для этого нам не подойдет по следующей причине. Синтетический стрэддл предполагает комбинирование инвестором в своем портфеле исследуемой акции и безрисковой облигации. В модели Блэка–Шоулза присутствует лишь безрисковая процентная ставка, но отсутствует сама безрисковая облигация.

Используя цифры табл. 1, можно построить следующую линейную регрессию цены акции:

$$y = 72,78914 + 1,50618 x,$$

где  $y$  — цена обыкновенной акции Сбербанка России (руб.);

$x$  — номер месяца, начиная с номера 0.

Горизонт планирования возьмем равным одному году. При этом будем корректировать свою позицию в портфеле через полгода от настоящего момента времени, т. е. от даты 22.11.10. Согласно построенной регрессионной зависимости цена “страйк” на 22.05.11 составит 101,407 руб., а на 22.11.11 — 110,444 руб.

Для удобства дальнейших рассуждений введем обозначения:

$S$  — текущая рыночная цена акции (руб.);

$S_0$  — текущая прогнозная цена акции (руб.);

$u$  — полугодовой темп роста текущей прогнозной цены акции в случае ее повышения;

$d$  — полугодовой темп роста текущей прогнозной цены акции в случае ее понижения;

$S_0 u$  — прогнозная цена акции через полгода в случае ее повышения (руб.);

$S_0 d$  — прогнозная цена акции через полгода в случае ее понижения (руб.);

$S_0 u^2$  — прогнозная цена акции через год в случае ее двукратного повышения (руб.);

$S_0 u d$  — прогнозная цена акции через год в случае ее повышения через полгода и понижения еще через полгода (руб.);

$S_0 d u$  — прогнозная цена акции через год в случае ее понижения через полгода и повышения еще через полгода (руб.);



$S_0 d^2$  — прогнозная цена акции через год в случае ее двукратного понижения (руб.);

$K$  — цена исполнения синтетического стрэддла через год (цена “страйк”) (руб.);

$C$  — цена синтетического колл-опциона (руб.);

$P$  — цена синтетического пут-опциона (руб.);

$O$  — цена синтетического стрэддла (руб.);

$O_u$  — цена синтетического стрэддла через полгода в случае повышения прогнозной цены акции (руб.);

$O_d$  — цена синтетического стрэддла через полгода в случае понижения прогнозной цены акции (руб.);

$O_{uu}$  — цена синтетического стрэддла через год в случае двукратного повышения прогнозной цены акции (руб.);

$O_{ud}$  — цена синтетического стрэддла через год в случае повышения прогнозной цены акции через полгода и понижения еще через полгода (руб.);

$O_{du}$  — цена синтетического стрэддла через год в случае понижения прогнозной цены акции через полгода и повышения еще через полгода (руб.);

$O_{dd}$  — цена синтетического стрэддла через год в случае двукратного понижения прогнозной цены акции (руб.);

$t$  — номер полугодия;

$B_0$  — текущая рыночная цена безрисковой облигации (руб.);

$r_f$  — полугодовая безрисковая процентная ставка (полугодовая полная доходность безрисковой облигации) (%);

$B_1 = B_0 (1 + r_f)$  — прогнозная цена безрисковой облигации через полгода (руб.);

$B_2 = B_0 (1 + r_f)^2$  — прогнозная цена безрисковой облигации через год (руб.);

$n_{S,0}$  — количество акций, обращающихся в настоящий момент времени ( $t = 0$ );

$n_{B,0}$  — количество облигаций, обращающихся в настоящий момент времени ( $t = 0$ );

$n_{S,1}^u$  — количество акций, держащихся через полгода ( $t = 1$ ) в ситуации  $u$ ;

$n_{B,1}^u$  — количество облигаций, держащихся через полгода ( $t = 1$ ) в ситуации  $u$ ;

$n_{S,1}^d$  — количество акций, держащихся через полгода ( $t = 1$ ) в ситуации  $d$ ;

$n_{B,1}^d$  — количество облигаций, держащихся через полгода ( $t = 1$ ) в ситуации  $d$ .

В нашей биномиальной модели мы предполагаем, что прогнозная цена акции, определенная на 22.11.10 согласно полученной регрессии, в ближайший год либо возрастет на 50% (темп  $u$ ), либо не изменится (темп  $d$ ). Такие пределы изменения цены выбираются в соответствии с возможными годовыми темпами инфляции в России. Тогда полугодовая ставка повышения прогнозной цены составит

$$i = \sqrt{1,5} - 1 = 0,224745,$$

следовательно,  $u = 1,224745$ .

В результате цена исследуемой акции за год изменится так, как это показано на рис. 10. Заметим, что в настоящий момент времени мы используем в расчетах текущую рыночную цену акции  $S$  на 22.11.10. Кроме того, ситуации  $ud$  и  $du$  идентичны.

В качестве безрисковой процентной ставки в России можно взять, к примеру, ставку рефинансирования, которая 22.11.10 составляла 7,75%. Однако, если мы хотим использовать в нашем портфеле безрисковую облигацию, то надо подобрать государственную облигацию с подобной полной годовой доходностью. Это, например, облигация ОФЗ-46020 с полной годовой доходностью 7,77% и настоящей рыночной ценой на 22.11.10 —  $B_0 = 92,015$  руб. ([www.quote.rbc.ru](http://www.quote.rbc.ru)). Тогда для нее полугодовая полная доходность составит

$$r_f = \sqrt{1,0777} - 1 = 0,038123,$$

$a B_1 = 95,523$  руб. и  $B_2 = 99,175$  руб.

В нашем примере мы составляем синтетический опцион (стрэддл), который позволяет своему владельцу по истечении двух полугодий по цене “страйк”  $K = 110,444$  руб. выборочно или купить, или продать акцию (опцион колл-пут). Опцион, который может использоваться выборочно как опцион “колл” или опцион “пут”, обещает в момент времени  $t = 2$  зависимые от ситуации денежные потоки величиной

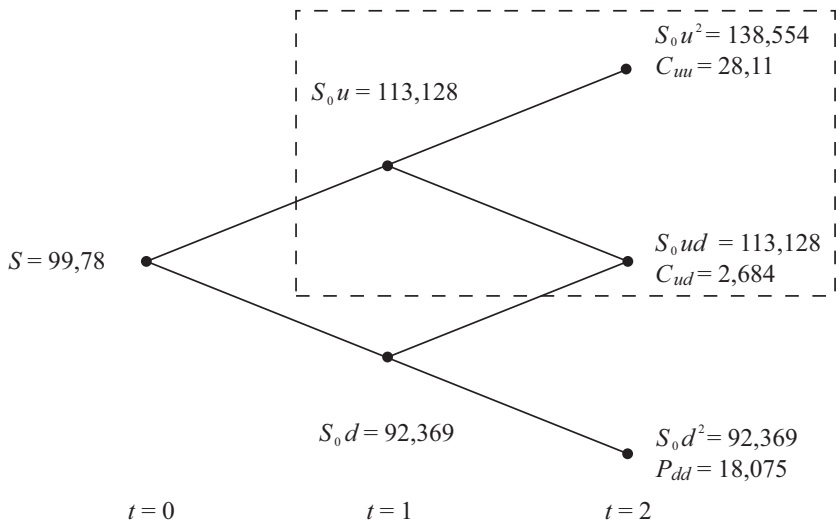


Рис. 10. Курс акций Сбербанка в биномиальной модели (руб.)

$$\begin{aligned}
 O_{uu} &= \max(\max(S_0u^2 - K, 0), \max(K - S_0u^2, 0)), \\
 O_{ud} &= \max(\max(S_0ud - K, 0), \max(K - S_0ud, 0)), \\
 O_{du} &= \max(\max(S_0du - K, 0), \max(K - S_0du, 0)), \\
 O_{dd} &= \max(\max(S_0d^2 - K, 0), \max(K - S_0d^2, 0)).
 \end{aligned}$$

С цифрами из нашего примера это означает, что

$$C_{uu} = 28,11, \quad C_{ud} = 2,684, \quad P_{dd} = 18,075.$$

В момент времени  $t = 1$  опцион “колл” и “пут” не порождает ни доходов, ни расходов, т. к. он относится к европейскому типу, а значит,

$$O_u = O_d = 0.$$

Исполнять синтетический опцион раньше срока (американский опцион) неразумно, поскольку корректировки нашей позиции в  $t = 1$

влекут за собой определение первоначальной структуры портфеля в  $t = 0$ , следовательно, они необходимы. В противном случае, вкладывая сейчас деньги в портфель, который не будет в итоге использоваться, мы в будущем понесем убытки.

Далее составим и решим три системы уравнений. При этом мы как бы “двигаемся назад во времени”.

- (1) Рассмотрим рис. 10 и сконцентрируем внимание на окаймленном участке. Пусть мы находимся в моменте времени  $t = 1$ , и курс акций повысился до  $S_0u$ . В этой ситуации мы можем быть убеждены, что курс акции в момент времени  $t = 2$  или повысится до  $S_0u^2$ , или снизится до  $S_0ud$ . Это одновременно означает, что опцион колл-пут тогда породит денежные потоки или в объеме  $C_{uu}$ , или в объеме  $C_{ud}$ .

Тогда необходимо при действующих здесь условиях сконструировать из акции и облигации портфель, который в момент времени  $t = 2$  породит в точности те же денежные потоки, что и опцион “колл” и “пут”, а именно,  $C_{uu}$  и  $C_{ud}$ . Если далее учесть, что облигация в момент времени  $t = 1$  котируется по цене  $B_1$  и один период позднее даст гарантированные возвратные потоки в объеме  $B_1(1 + r_f)$ , тогда система уравнений для определения структурных переменных эквивалентного портфеля будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} S_0u^2 \cdot n_{S,1}^u + B_1(1 + r_f) \cdot n_{B,1}^u = C_{uu}, \\ S_0ud \cdot n_{S,1}^u + B_1(1 + r_f) \cdot n_{B,1}^u = C_{ud}, \end{cases}$$

или с конкретными данными из нашего примера

$$\begin{cases} 138,554 \cdot n_{S,1}^u + 99,165 \cdot n_{B,1}^u = 28,11, \\ 113,128 \cdot n_{S,1}^u + 99,165 \cdot n_{B,1}^u = 2,684, \end{cases}$$

из чего мы получаем решения  $n_{S,1}^u = 1$  и  $n_{B,1}^u = -1,11374$ .

- (2) Вторая система уравнений предполагает, что курс акции в момент времени  $t = 1$  упадет до стоимости  $S_0d$ . При этом условии эквивалентный портфель необходимо образовать так, чтобы он

в момент времени  $t = 2$  при неизменности курса акции принял значение  $P_{dd}$ , а при росте курса акции — значение  $C_{du} = C_{ud}$ . Поэтому получаем, что

$$\begin{cases} S_0 u d \cdot n_{S,1}^d + B_1(1 + r_f) \cdot n_{B,1}^d = C_{ud}, \\ S_0 d^2 \cdot n_{S,1}^d + B_1(1 + r_f) \cdot n_{B,1}^d = P_{dd}, \end{cases}$$

или с конкретными данными из нашего примера

$$\begin{cases} 113,128 \cdot n_{S,1}^d + 99,165 \cdot n_{B,1}^d = 2,684, \\ 92,369 \cdot n_{S,1}^d + 99,165 \cdot n_{B,1}^d = 18,075, \end{cases}$$

что приводит к решениям  $n_{S,1}^d = -0,741413$  и  $n_{B,1}^d = 0,872875$ .

- (3) С помощью обеих первых систем уравнений мы определили структуру эквивалентного портфеля, который следует выбрать нам в интересах дублирования нашего опциона в момент времени  $t = 1$ . Естественно, для приобретения этого портфеля в соответствующий момент времени необходимы платежи. Но так как сам опцион колл-пут по истечении первого периода не порождает ни расходов, ни доходов, то эти платежи должны финансировать сами себя. Вследствие этого мы должны выбрать доли ценных бумаг в портфеле в момент времени  $t = 0$  таким образом, чтобы связанные с ним в момент времени  $t = 1$  доходы были бы в точности так же велики, как необходимые в этом моменте времени расходы. Это означает следующее:

$$\begin{cases} S_0 u \cdot n_{S,0} + B_0(1 + r_f) \cdot n_{B,0} = n_{S,1}^u \cdot S_0 u + n_{B,1}^u \cdot B_1, \\ S_0 d \cdot n_{S,0} + B_0(1 + r_f) \cdot n_{B,0} = n_{S,1}^d \cdot S_0 d + n_{B,1}^d \cdot B_1. \end{cases}$$

Левая часть первой (второй) формулы описывает возвратные потоки от владения акцией и облигацией в момент времени  $t = 1$  при условии, что курс акции повысился (понижился). В правой части находятся доходы, которые необходимы для финансирования зависимых от ситуаций эквивалентных портфелей в момент времени  $t = 1$ . С учетом данных примера и промежуточных результатов для структурных переменных эквивалентного портфеля это означает:

$$\begin{cases} 113,128 \cdot n_{S,0} + 95,523 \cdot n_{B,0} = 6,74, \\ 92,369 \cdot n_{S,0} + 95,523 \cdot n_{B,0} = 14,896, \end{cases}$$

что, наконец, приведет к решениям  $n_{S,0} = -0,39289$  и  $n_{B,0} = 0,535859$ .

Имея эти числа, мы точно знаем, что необходимо делать сегодня ( $t = 0$ ) и позже ( $t = 1$ ) для того, чтобы посредством покупки и продажи акций и облигаций поставить себя в положение, которое в отношении ожидаемых денежных потоков никоим образом не отличается от приобретения опциона колл-пут. Цена приобретаемого сегодня портфеля составляет

$$n_{S,0} \cdot S + n_{B,0} \cdot B_0 = -0,39289 \cdot 99,78 + 0,535859 \cdot 92,015 = 10,105,$$

и это число при условии свободного от арбитража рынка капитала должно в точности совпадать с ценой  $O$ , которую инвестор обоснованно согласится заплатить за опцион колл-пут (синтетический стрэддл).

При помощи табл. 2 можно подтвердить, что наше решение действительно имеет желаемое свойство дублирования опциона “колл” и “пут”. Мы продаем без покрытия в момент времени  $t = 0$  акции в количестве 0,39289 и одновременно покупаем 0,535859 облигаций. Это сегодня связано с чистыми расходами в объеме 10,104 руб. Рассмотрим для примера, что случится, если курс акции по истечении одного периода повысится. Продажа акции без покрытия вынудит нас осуществить расходы в объеме  $0,39289 \cdot 113,128 = 44,447$  руб., в то время как за счет держания облигации мы получим доходы в объеме  $0,535859 \cdot 95,523 = 51,187$  руб. Таким образом, сальдо доходов оказывается равным  $51,187 - 44,447 = 6,74$  руб. Однако мы должны одновременно приобрести 1 акцию и продать 1,11374 облигаций. Поэтому для покупки акции мы осуществляем расходы в объеме 113,128 руб., в то время как проданные без покрытия облигации приносят нам доходы в объеме  $1,11374 \cdot 95,523 = 106,388$  руб. Сальдо расходов оказывается равным  $113,128 - 106,388 = 6,74$  руб., так что доходы и расходы в момент времени  $t = 1$  совершенно выравниваются. Независимо от того, как изменяется курс акций во втором пе-

Таблица 2

## Дублирование опциона колл-пут

Количество активов	Платежи в моменты времени (руб.)							
	$t = 0$	$t = 1$		$t = 2$				
		$u$	$d$	$uu$	$ud$	$du$	$dd$	
$n_{S,0} = -0,39289$	39,203	-36,291	0	0	0	0	0	
$n_{B,0} = 0,535859$	-49,307	51,187	0	0	0	0	0	
$n_{S,1} = 1$	0	-113,128	138,554	113,128	0	0	0	
$n_{B,1} = -1,11374$	0	106,388	-110,444	-110,444	0	0	0	
$n_{S,1}^d = -0,741413$	0	0	0	0	-83,875	-68,484		
$n_{B,1}^d = 0,872875$	0	-83,38	0	0	86,559	86,559		
	-10,104	0	28,11	2,684	2,684	18,075		

риоде, из-за проданных без покрытия облигаций мы осуществляем расходы величиной в  $1,11374 \cdot 99,165 = 110,444$  руб. Если курс акции повышается, то мы за счет продажи акции получаем 138,554 руб.; если, наоборот, курс акции стабилен, то тогда наша выручка составляет лишь 113,128 руб. В первом случае сальдо доходов оказывается равным 28,11 руб., во втором — 2,684 руб. Эти значения в точности совпадают с денежными потоками, которые может ожидать владелец опциона колл-пут при точно такой же динамике курса акции.

## 2.2. Статистический метод выбора оптимального синтетического стрэддла

После того, как текущая цена синтетического стрэддла известна, необходимо определить, покупать или продавать сейчас стрэддл, чтобы получить прибыль через год ( $v = 2$ ).

Ожидаемая прибыльность стрэддла зависит от неустойчивости цены базисной акции. В нашем примере это акции Сбербанка России. Стрэддл будет приносить прибыль, если акции очень неустойчивы, но он будет приносить убытки, если цена относительно стабильна. График выплат (сплошная линия на рис. 11) показывает, какой должна быть неустойчивость, чтобы длинный стрэддл приносил прибыль.

Следует отметить, что на рис. 11 отражены цены стрэддла, увеличенные на средний прогнозируемый годовой темп инфляции — 25%. Такой способ расчета позволяет учесть будущую временную стоимость денег, вложенных инвестором в стрэддл. Тогда реальная стоимость стрэддла через год ( $v = 2$ ) составит

$$O(1 + 0,25) = 10,105 \cdot 1,25 = 12,631 \text{ (руб.)}.$$

Если цена акции Сбербанка в момент истечения опциона составит 110,444 руб. то и “колл” и “пут” опционы завершаются “при деньгах”. Ни тот, ни другой опцион не принесут прибыли, а потому не будут исполнены, и инвестор будет иметь убытки в размере 12,631 руб. Продавец стрэддла соответственно получит прибыль в размере 12,631 руб.



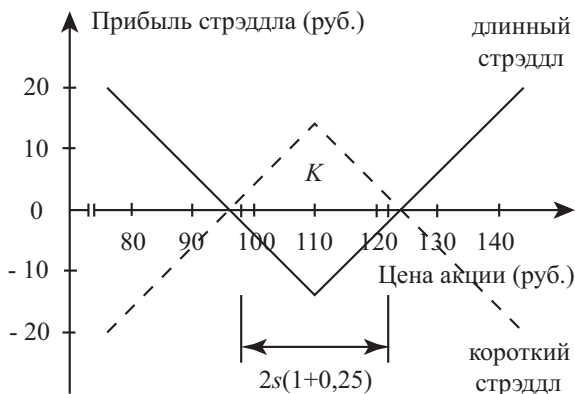


Рис. 11. Графики выплат для синтетического стрэддла

Однако, если сложится благоприятная ситуация и акции Сбербанка вырастут в цене, например, до 138,554 руб. в момент истечения опциона, инвестор исполнит колл-опцион и получит доход  $138,554 - 110,444 = 28,11$  руб. за акцию. Если принять во внимание стоимость опциона в размере 12,631 руб., то инвестор зарабатывает  $28,11 - 12,631 = 15,479$  руб. на акцию, занимая позицию “стрэддл”. Если сложится неблагоприятная ситуация и акции будут продаваться, к примеру, только по 92,369 руб. в момент истечения опциона, то инвестор исполнит пут-опцион, купит акции за 92,369 руб. и перепродает их продавцу опциона за 110,444 руб., получив при этом  $110,444 - 92,369 = 18,075$  руб. дохода. С учетом расходов на приобретение позиции “стрэддл” в размере 12,631 руб. прибыль инвестора составит  $18,075 - 12,631 = 5,444$  руб. на акцию. Таким образом, длинный стрэддл приводит к убыткам, если цена акций Сбербанка находится между  $110,444 - 12,631 = 97,813$  руб. и  $110,444 + 12,631 = 123,075$  руб. в момент истечения опциона, но он принесет прибыль, если цена акций окажется вне этих границ.

Таким образом, операцию “длинный стрэддл” в момент  $t = 0$  будут проводить лишь те инвесторы, которые считают, что акции Сбер-

банка будут более неустойчивыми, чем ожидания неустойчивости, отраженные в ценах опционов.

Инвесторы, которые ожидают, что цены акций Сбербанка будут менее неустойчивыми, чем это отражено в ценах опционов, будут продавать стрэддлы, а это означает, что они будут занимать позицию по короткому стрэддлу. График выплат для коротких стрэддлов на опционы на акции Сбербанка с ценой “страйк”  $K = 110,444$  руб. и истечением срока через год показан пунктирной линией на рис. 11. Схема формирования прибыли в точности противоположна описанной выше — продавец стрэддла получает прибыль, когда цены акций более или менее близки к цене “страйк”, но терпит убытки, когда имеет место существенное отклонение от нее.

В этих условиях необходимо выбрать границы цен акций в  $t = 2$ , относительно которых следует принимать решение, какой строить синтетический стрэддл — длинный или короткий. Такие границы в  $t = 0$  можно задать двойным стандартным отклонением, которое рассчитывается с использованием следующих формул.

1. *Средняя величина рыночной цены акции [2]:*

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

где  $X$  — рыночная цена акции (руб.);

$i$  — номер момента наблюдения;

$n$  — общее число наблюдений;

$x_i$  — рыночная цена акции в  $i$ -й момент наблюдения (руб.).

2. *Несмещенная оценка теоретической дисперсии [2]:*

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2.$$

В результате можем найти стандартное отклонение  $s$ .

Для акций Сбербанка расчет стандартного отклонения проводим с использованием данных табл. 1, после чего сравниваем его с ценой синтетического стрэддла в момент  $t = 0$ . В результате получаем, что

$$s = 9,843 < 10,105 = O.$$

Стандартное отклонение получилось меньше цены стрэддла, следовательно, двойное стандартное отклонение, умноженное на 1 плюс средний прогнозируемый годовой темп инфляции, тоже будет меньше двойной цены стрэддла в  $t = 2$ , т. е. через год

$$2s(1 + 0,25) = 24,608 < 25,263 = 2O(1 + 0,25).$$

Эту ситуацию мы как раз и наблюдаем на рис. 11.

Отсюда можно сделать вывод, что синтетический стрэддл покрывает прогнозируемую изменчивость акции через год, определяемую будущим двойным стандартным отклонением. Тогда инвестору выгоднее составить и в дальнейшем использовать короткий синтетический стрэддл. Это означает, что необходимо предпринимать действия, прямо противоположные действиям, описанным на стр. 62–64, т. е. формировать и корректировать структуру эквивалентного портфеля таким образом, чтобы доли акций Сбербанка России и облигаций ОФЗ-46020 имели знаки, противоположные знакам, полученным в табл. 2. Это приведет к денежным потокам, противоположным тем, которые представлены в этой же таблице.

При такой стратегии инвестор через год получит прибыль по синтетическому стрэддлу.

### 2.3. Эмпирические результаты

Для того, чтобы инвестору разработать оптимальную стратегию управления фондовым риском, необходимо проанализировать финансовые возможности по наиболее перспективным акциям рынка. В качестве таковых возьмем те акции, рыночная цена которых за исследуемый 2010 г. в общей тенденции возрастает. Таким образом, исходную информацию ([www.nettrader.ru](http://www.nettrader.ru)) соберем в табл. 3 (обыкновенные акции Сбербанка России исследовались ранее).

Используя данные табл. 3, построим линейные регрессии цен акций в табл. 4, где  $y$  — цена акции, а  $x$  — номер месяца, начиная с номера 0. На основе полученных регрессий для каждой акции рассчитаем также в таблице текущую прогнозную цену ( $S_0$ ), прогнозную цену через полгода в случае ее повышения ( $S_0u$ ), прогнозную цену через год в случае ее двукратного повышения ( $S_0u^2$ ) и цену

## Динамика цен 6 акций фондового рынка (руб.)

Эмитент	22.10.09	23.11.09	22.12.09	22.01.10	24.02.10	22.03.10	22.04.10
Северсталь	243,06	239,81	255,76	345,56	338,43	375,64	387,34
Норильский никель	4 289,02	4 142,06	4 183,95	4 805,12	4 583,15	4 907,84	5 446,79
РусГидро	1,117	1,204	1,164	1,229	1,291	1,454	1,646
Татнефть	140,9	146,86	139,85	137,83	141,51	141,63	145,32
Банк ВТБ	0,0635	0,0644	0,0704	0,0721	0,0742	0,0782	0,078
Сургутнефтегаз	28,865	27,201	26,675	26,629	24,684	27,611	29,023

Эмитент	21.05.10	22.06.10	22.07.10	23.08.10	22.09.10	22.10.10	22.11.10
Северсталь	321,24	341,21	346,82	369,61	430,27	450,16	456,15
Норильский никель	4 919,51	5 015,52	4 979,74	5 181,33	4 945,2	5 483,24	5 977,87
РусГидро	1,536	1,773	1,583	1,6	1,601	1,621	1,58
Татнефть	124,51	144,97	146,51	142,54	144,7	148,99	150,62
Банк ВТБ	0,0686	0,0791	0,0801	0,0804	0,0885	0,1002	0,1043
Сургутнефтегаз	26,053	29,179	29,266	27,594	29,193	29,97	29,946

“страйк” через год ( $K$ ) для каждого синтетического стрэддла. Кроме того в табл. 4 отразим также текущую рыночную цену  $S$  каждой акции.

Напомним, что полугодовой множитель  $u = 1,224745$  рассчитывается для случая годового повышения прогнозной цены акций, составляющего 50%.

Имея необходимую прогнозную информацию о каждой из исследуемых акций, можем составить синтетический стрэддл, каждый из которых включает в себя какую-то одну акцию и безрисковую облигацию. Также, как и раньше, в качестве безрисковой возьмем облигацию ОФЗ-46020 с текущей рыночной ценой  $B_0 = 92,015$  руб. и полной годовой доходностью 7,77% ([www.quote.rbc.ru](http://www.quote.rbc.ru)).

После того, как для каждой из исследуемых акций будет получен синтетический стрэддл, будем определять при помощи оценки стандартного отклонения цены акции ( $s$ ), покупать стрэддл или продавать. В случае покупки имеем длинный стрэддл, а в случае продажи — короткий стрэддл.

Согласно данным табл. 4, нам необходимо составить и выбрать оптимальные синтетические стрэддлы для акций 6 эмитентов фондового рынка. Это сделано в табл. 5 аналогично тому, как это было сделано для акций Сбербанка России (об.).

Чтобы оценить эффективность данной методики, оценим прибыльность 7 реализованных позиций “короткий стрэддл” (включая акции Сбербанка России) через год 22.11.11. Это сделано в табл. 6.

Почти все 7 позиций “короткий стрэддл” оказались убыточными. Если при этом соотнести величины прибыли и убытка с реальной стоимостью данных позиций (1,25  $O$ ), то видно, что прибыльность стрэддла для акций “Татнефти” не компенсирует убыточность остальных 6 стрэддлов.

Однако, если инвестор вовремя объективно оценит официальное заявление США о невозможности остановить рост своего государственного долга и повышения потолка заимствований, то ему удастся заранее среагировать на последствия понижения кредитного рейтинга США, который произошел 5.08.11. С этой даты начался значительный обвал российских акций на фондовом рынке, который продолжался вплоть до 2012 г. (рис. 12) ([www.nettrader.ru](http://www.nettrader.ru)). Предполо-

Таблица 4

## Прогнозная информация о 6 акциях фондового рынка (руб.)

Эмитент	Линейная регрессия	$S$	$S_0$	$S_0 u$	$S_0 u^2$	$K$
Северсталь	$y = 254,42535 + 14,71544x$	456,15	445,726	545,901	668,589	622,311
Норильский никель	$y = 4\,233,28564 + 105,43217x$	5 977,87	5 603,904	6 863,353	8 405,858	6 869,09
РусГидро	$y = 1,17931 + 0,04273x$	1,58	1,735	2,125	2,603	2,248
Татнефть	$y = 139,18687 + 0,52883x$	150,62	146,062	178,889	219,093	152,408
Банк ВТБ	$y = 0,06203 + 0,00257x$	0,1043	0,0954	0,1169	0,1432	0,1263
Сургутнефтегаз	$y = 26,58388 + 0,21664x$	29,946	29,4	36,008	44,1	32

Таблица 5

## Составление 6 синтетических стрэддлов (руб.)

Эмитент	$\bar{X}$	$s$	$O$	Тип стрэддла
Северсталь	350,075714	70,004	125,337	короткий
Норильский никель	4 198,595714	516,448	627,151	короткий
РусГидро	1,457071	0,212	0,478	короткий
Татнефть	142,624286	6,316	15,911	короткий
Банк ВТБ	0,078714	0,0121	0,0161	короткий
Сургутнефтегаз	27,992071	1,603	3,237	короткий

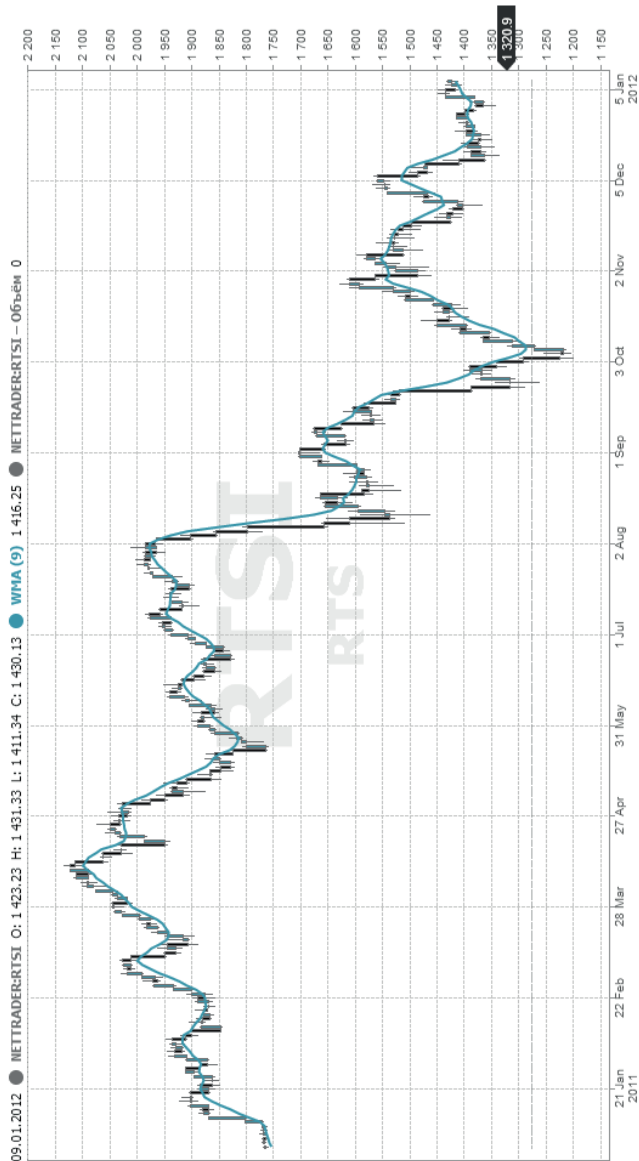


Рис. 12. Динамика индекса RTSI в 2011 г.





жим, что мы анализируем поведение рационального инвестора, который в такой ситуации, например, 1.08.11 досрочно закрывает свои 7 позиций “короткий стрэддл”.

Прежде, чем произвести расчеты, подобные тем, что были сделаны в табл. 6, необходимо оценить реальные стоимости стрэддлов на 1.08.11. С 22.11.10 по 1.08.11 прошел 261 день. Используя известное соотношение  $1+i = e^{\delta}$ , связывающее дискретную ставку процента с непрерывной, подставим в него получающуюся дробную часть года, равную 0,715068. Тогда реальная стоимость стрэддлов скорректируется на множитель  $1,25^{0,715068} = 1,173$ . С учетом этого факта оценим прибыльность 7 позиций “короткий стрэддл” при условии закрытия их досрочно, т. е. 1.08.11. Это сделано в табл. 7.

Анализируя данные последней колонки табл. 7, можно сделать вывод, что результирующая прибыльность 7 позиций “короткий стрэддл”, закрытых раньше срока истечения стрэддлов, т. е. 1.08.11, составляет 84,11%. Это свидетельствует об эффективности разработанной методики даже в условиях шоковых явлений в экономике страны при условии мгновенного реагирования на них со стороны инвестора.

Таким образом, представленная нами модель построения и использования синтетических стрэддлов позволяет инвестору значительно снизить свой индивидуальный фондовый риск, связанный с находящимися в его собственности базисными активами, т. е. акциями. Данную методику также можно использовать для управления другими базисными активами, например, драгоценными металлами, сельскохозяйственными продуктами (пшеница, рис) и т. д.

## Глава 3

### Реальные опционы

#### 3.1. Оценка проектов R&D методом ROV в условиях ограниченности информации

В настоящее время особо пристальное внимание уделяется инвестированию в инновационное развитие промышленных предприятий. В условиях посткризисного периода традиционные подходы к инвестированию далеко не всегда приводят к ожидаемому положительному результату, поэтому необходимо осуществлять поиск новых, нестандартных методов и инструментов управления инновационной деятельностью предприятий, использованию современных технологий менеджмента, действующих в коммерческой среде.

Инвестиции и инновации — это две неразрывно связанные сферы экономической деятельности. Инновационная деятельность промышленных предприятий России в посткризисный период создала специфическую потребность, которая не может быть удовлетворена при помощи традиционных инвестиционных инструментов и методов оценки их эффективности. Это потребность принятия инвестиционных решений в условиях неопределенности, вызванной быстрым изменением условий деятельности, потребность сократить риск потери конкурентоспособности в будущем из-за отсутствия прав на использование инновации или иных прав, имущественных или неимущественных. Причем неизвестно, насколько значимым станет тот или иной фактор в будущем. Необходимо найти возможность нейтрализовать риск инвестирования в инновационную деятельность предприятий, израсходовав на это адекватную сумму.

Одним из направлений нейтрализации указанных рисков, не альтернативным развитию прогнозирования, а дополняющим его, является создание методов оценки инвестиций и инвестиционных показателей, адаптированных к деятельности предприятий в быстро изменяющихся условиях внешней экономической среды. Наиболее перспективной областью приложения таких методов является инновационная деятельность, сфера реального инвестирования с наиболее серьезными рисками и неопределенностями. В этой сфере дея-

тельности традиционные методы оценки эффективности инвестиций часто дают отрицательные результаты, что, с одной стороны, является одной из причин отказа от инвестирования в различные объекты, а с другой стороны, часто не отражает реальной эффективности проектов.

Для оценки инвестиционных инновационных проектов с учетом возможности изменения условий реализации таких проектов и принятия соответствующих решений предлагается использовать инструментальный метод реальных опционов (ROV). Реальные опционы дают возможность изменять и принимать решения в будущем в соответствии с поступающей информацией. Это актуально для оценки инвестиционных инновационных проектов в условиях динамичной, быстро меняющейся внешней среды деятельности предприятий и расширения гибкости в принятии управленческих решений. Метод ROV имеет смысл использовать, если:

- (1) менеджеры предприятия способны принимать гибкие управленческие решения при появлении новых данных по проекту;
- (2) результат проекта во многом зависит от принимаемых менеджментом предприятия решений;
- (3) результат проекта подвержен высокой степени неопределенности;
- (4) при оценке проекта по методу дисконтированных денежных потоков значение чистого приведенного дохода (NPV) отрицательно или чуть больше нуля.

Важно также, что использование инструмента реальных опционов позволяет привлечь инвестиции под создание и коммерциализацию инновационного продукта, когда результаты реализации проекта еще не до конца ясны, а неучастие в проекте грозит потерей конкурентоспособности предприятия в будущем.

В качестве примера рассмотрим вариант привлечения инвестиций “под продукт” в автомобильной промышленности. Предположим, что ОАО “КАМАЗ” разрабатывает новую модель грузовика на основе последней модели “Седельный тягач КАМАЗ-5460”, но при этом у предприятия нет уверенности в быстрой востребованности

этой модели на рынке автоперевозок. Поэтому предприятие нейтрализует свои коммерческие риски продажей опционов, которые могут быть переведены в твердые контракты при повышении объема грузоперевозок на данной модели грузовика (рис. 13). Как инвестиционный инструмент, приобретенный инвестором, эти опционы могут быть впоследствии выгодно перепроданы.

Принимая решение о проведении НИОКР, менеджмент предприятия (исследователь — разработчик — производитель) и предполагаемый покупатель (инвестор) находятся в условиях наибольшей неопределенности реализации и коммерческих перспектив. После проведения исследований коммерческие перспективы исходного проекта станут более определенными, и принимать решение будет проще. Однако эта ясность может обернуться как против инвестора, который будет финансировать дополнительное исследование, так и против обладателя прав на ранее полученный результат (исследователя), который может провести исследование за свой счет, без привлечения инвестора.

Если исследование финансирует предполагаемый покупатель прав на ранее полученный результат, причем выясняется высокая коммерческая привлекательность результата, то цена прав на этот результат немедленно будет повышена. Получается, что, финансируя дополнительное исследование, потенциальный покупатель ухудшит свое положение. Аналогичным образом может ухудшить свое положение исследователь, если проведет это исследование за свой счет, а результат окажется отрицательным.

Ситуация меняется в лучшую сторону, если затраты на проведение дополнительного исследования рассматриваются как приобретение благоприятной возможности в виде опциона — права без обязанности. Например, потенциальный покупатель прав на ранее полученный результат соглашается финансировать дополнительное исследование, а в обмен получает право выбирать после его завершения между приобретением исключительных прав по заранее фиксированной цене или отказом от такой сделки. Важно, что цена возможной сделки фиксируется заранее. При этом цена может пониматься широко, т. е. совсем не обязательно понимать цену как фиксированную денежную сумму. Сам платеж не обязательно осуществляется

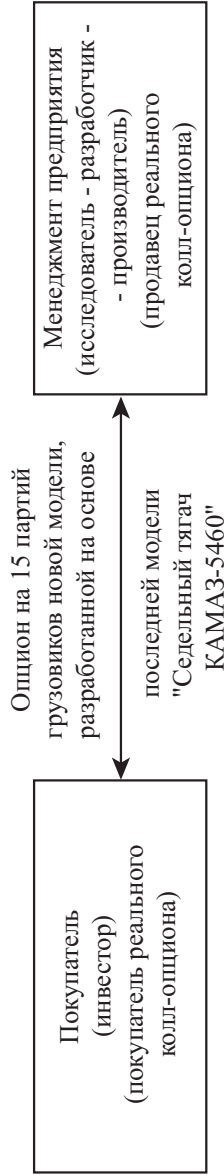


Рис. 13. Участники опционного контракта

в деньгах. Например, в качестве платы может быть предоставлен новый опцион на проведение НИОКР по теме, определяемой исполнителем, либо другие ресурсы и предпочтения, имеющие реальную стоимость.

Затраты на проведение дополнительного исследования НИОКР и коммерческой эффективности, например, 15 партий грузовиков можно спланировать в твердой денежной сумме, приняв их в размере рыночной стоимости опциона. Для инвестора это будет колл-опцион, и тогда можно оценить его рыночную (текущую) стоимость с использованием соответствующей расчетной модели. Полученная величина может использоваться в качестве стоимости управленческого опциона для оценки реального NPV инновационного проекта:

$$\begin{aligned} \text{реальный NPV} &= \\ &= \text{традиционный NPV} + \text{стоимость управленческого опциона.} \end{aligned}$$

Использование ставшей уже классической модели Блэка-Шоулза [32] для оценки рыночной стоимости реального опциона в условиях российской экономики проблематично, поскольку в нее входит средне-квадратическое отклонение доходности контракта, которое точно спрогнозировать не представляется возможным. Кроме того, модель Блэка-Шоулза применима только для европейских опционов. Мы же предполагаем достаточную гибкость опционного контракта, которая подразумевает возможность исполнения опциона досрочно. В связи с этим возникает задача разработки и применения другой модели. В этом качестве нами предлагается использовать биномиальную модель оценки опциона, которая модифицируется для условий повышенного риска.

Для удобства дальнейших рассуждений введем некоторые обозначения:

- $S_t$  — рыночная цена контракта по истечении периода  $t$  (руб.);
- $r_u$  — ставка наибольшей прогнозируемой инвестором инфляции за период  $t$  (%);
- $r_d$  — ставка наименьшей прогнозируемой инвестором инфляции за период  $t$  (%);
- $r_f$  — безрисковая ставка (ставка рефинансирования) за период  $t$  (%);

$i$  — прогнозируемая предприятием (продавцом реального опциона) ставка инфляции за период  $t$ , зафиксированная в контракте (%);  
 $K_t$  — цена исполнения опциона по истечении периода  $t$  (руб.);  
 $C_t$  — цена опциона по истечении периода  $t$  (руб.);  
 $C_u$  — цена опциона в случае наибольшего роста инфляции (руб.);  
 $C_d$  — цена опциона в случае наименьшего роста инфляции (руб.);  
 $C^N$  — цена “живого”, т. е. не исполненного, опциона (руб.);  
 $C^A$  — цена “мертвого”, т. е. исполненного, опциона (руб.);  
 $C_u^N$  — цена “живого” опциона в случае наибольшего роста инфляции (руб.);  
 $C_d^N$  — цена “живого” опциона в случае наименьшего роста инфляции (руб.);  
 $C_u^A$  — цена “мертвого” опциона в случае наибольшего роста инфляции (руб.);  
 $C_d^A$  — цена “мертвого” опциона в случае наименьшего роста инфляции (руб.).

Рассмотрим предлагаемую модель, используя перечисленные обозначения. Пусть в настоящий момент времени инвестор и продавец реального опциона рассуждают следующим образом:

- (1) инвестор считает, что наименьший годовой темп инфляции в России составит 5%, а наибольший — 55%;
- (2) продавец реального опциона прогнозирует годовой темп инфляции в размере 30% и прописывает его в контракте.

После этого опционный контракт составляется с учетом следующих условий:

1. Настоящая рыночная цена контракта:  $S_0 = 15$  млрд руб.
2. Настоящая цена исполнения контракта:  $K_0 = 15$  млрд руб.
3. Общий срок действия контракта составляет два года.
4. Опционный контракт является контрактом американского типа, т. е. может быть исполнен в любой момент общего срока его действия.

5. Контракт подразумевает изменение цены его исполнения ( $K_t$ ) через каждый период  $t$  в зависимости от инфляции  $i$  за соответствующее число периодов.

Из первых двух условий контракта следует, что его

традиционный NPV =  $S_0 - K_0 = 15$  млрд руб. – 15 млрд руб. = 0.

Оценим, каким будет реальный NPV с учетом опционной стоимости контракта.

Чтобы оценить стоимость реального опциона в каждом году общего срока, определим сначала входные параметры модели. При этом в качестве ставки рефинансирования возьмем ее текущее значение (в 2011 г.) – 7,75%. В результате

$$r_u = 0,55, \quad r_d = 0,05, \quad r_f = 0,0775, \quad i = 0,3.$$

Тогда получаем биномиальный процесс изменения рыночной цены контракта ( $S_t$ ) за два года, представленный на рис. 14. На этом же рисунке показано изменение цены исполнения опциона ( $K_t$ ) по годовой ставке  $i$ .

Согласно классической биномиальной модели цену “живого” опциона можно рассчитать по формуле [4]

$$C_t = \frac{1}{1 + r_f} (p C_{t+1,u} + (1 - p) C_{t+1,d}),$$

где  $p$  – псевдовероятность, определяемая соотношением

$$p = \frac{r_f - r_d}{r_u - r_d}.$$

В противоположность обычной математической вероятности наступления события число  $p$  прямо не оценивается. Его можно вычислить из доходностей  $r_u$  и  $r_d$  и безрисковой процентной ставки  $r_f$ . Для этого не нужны ни структура предпочтений участников рынка, ни информация об их индивидуальных представлениях о вероятностях. Они “остаются в тени”, и поэтому  $p$  если можно интерпретировать вообще, то только как псевдовероятность.



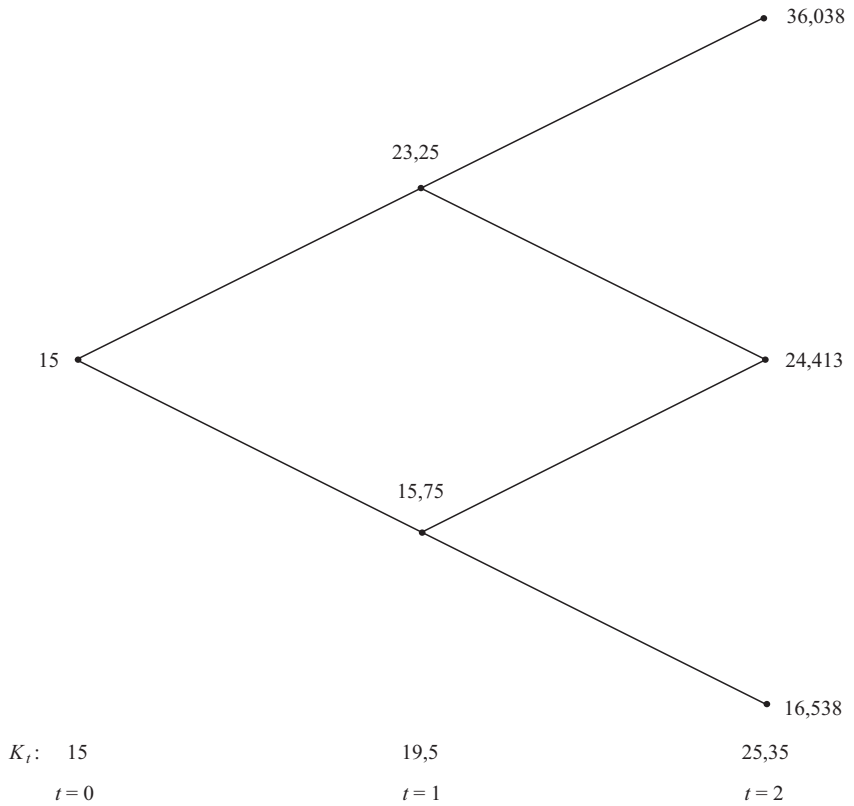


Рис. 14. Изменение рыночной цены контракта за два года (млрд руб.)

Таким образом, можно оценить стоимость опциона в любом периоде  $t$ , если известны  $C_{t+1,u}$  и  $C_{t+1,d}$  в следующем периоде  $t + 1$ .

Используя формулу для  $C_t$ , можно последовательно рассчитать цены “живого” опциона, начиная со второго года и заканчивая настоящим моментом времени (рис. 15).

Поскольку мы рассматриваем колл-опцион, то во втором году ( $t = 2$ ) его цена вычисляется по формуле [4, 5]

$$C_2^A = \max\{S_2 - K_2, 0\}.$$

По такому же принципу рассчитывается цена “мертвого” опциона в первом году ( $t = 1$ ).

Рассмотрим метод расчета цены “живого” и “мертвого” опциона в каждом году. Для этого сначала необходимо вычислить псевдовероятности  $p$  и  $1 - p$ :

$$p = \frac{0,0775 - 0,05}{0,55 - 0,05} = 0,055, \quad 1 - p = 0,945.$$

Тогда согласно данным рис. 15 и 14 получаем:

$$C_{1,u}^N = \frac{1}{1,0775}(0,055 \cdot 10,6875 + 0,945 \cdot 0) = 0545534,$$

$$C_{1,u}^A = 23,25 - 19,5 = 3,75.$$

В году  $t = 1$  в качестве цены опциона в каждой ситуации выбирается наибольшее ее значение. В данном случае в ситуации наибольшего роста инфляции дороже “мертвый” опцион, поэтому его цена выбирается для расчетов в предыдущем году  $t = 0$ .

Ситуация наименьшего роста инфляции в году  $t = 1$  согласно данным рис. 15 не просчитывается, так как цены опциона в году  $t = 2$ , используемые для расчета соответствующей цены опциона в году  $t = 1$ , равны нулю.

Тогда в начале срока:

$$C_0^N = \frac{1}{1,0775}(0,055 \cdot 3,75 + 0,945 \cdot 0) = 0,191415.$$

Последняя цифра означает цену реального опциона в млрд руб. в настоящий момент времени.

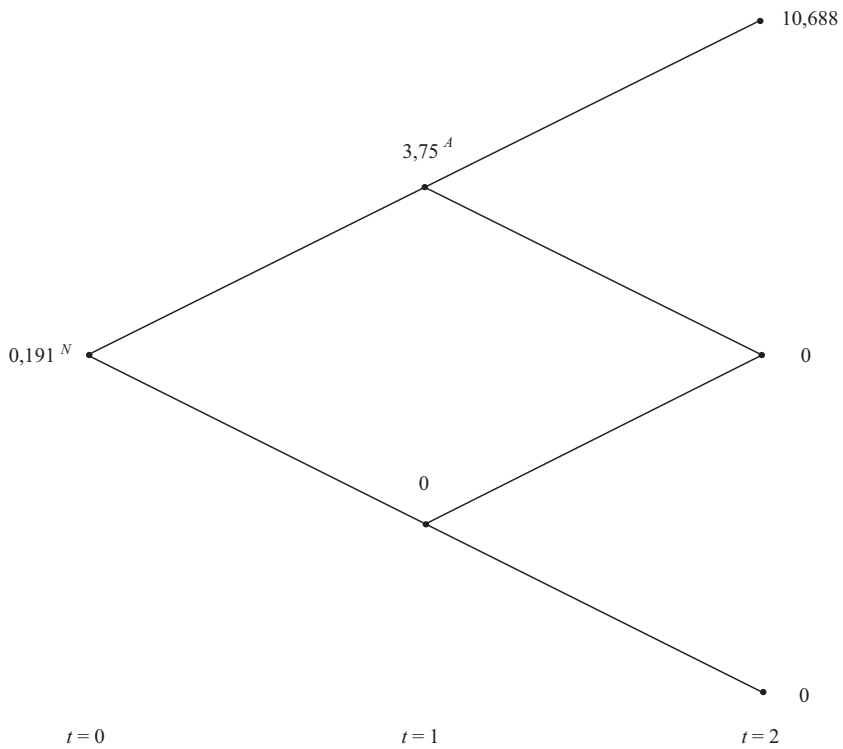


Рис. 15. Изменение цены реального опциона за два года (млрд руб.)

Нетрудно заметить, что в первом году в той ситуации, где цена опциона ненулевая, дороже “мертвый” опцион, а значит, в этой ситуации реальный опцион инвестору выгоднее исполнить досрочно.

В случае, если инвестору хотелось бы просчитать свои действия на протяжении более коротких интервалов времени, что позволило бы ему достичь еще большей гибкости в принятии управленческих решений, построим ту же самую модель с теми же входными параметрами для двух случаев: 1) полугодовые периоды времени, 2) квартальные периоды времени.

Для полугодий входные параметры модели изменятся следующим образом:

$$\begin{aligned} r_u &= \sqrt{1,55} - 1 = 0,24499, & r_d &= \sqrt{1,05} - 1 = 0,024695, \\ r_f &= \sqrt{1,0775} - 1 = 0,038027, & i &= \sqrt{1,3} - 1 = 0,140175. \end{aligned}$$

Тогда получаем биномиальный процесс изменения рыночной цены контракта ( $S_t$ ) за четыре полугодия, представленный на рис. 16. На этом же рисунке показано изменение цены исполнения опциона ( $K_t$ ) по полугодовой ставке  $i$ .

Используя формулу для  $C_t$ , можно последовательно рассчитать цены “живого” опциона, начиная с четвертого полугодия и заканчивая настоящим моментом времени (рис. 17). Для этого сначала необходимо вычислить псевдовероятности  $p$  и  $1 - p$ :

$$p = \frac{0,038027 - 0,024695}{0,24499 - 0,024695} = 0,060519, \quad 1 - p = 0,939481.$$

Тогда, согласно данным рис. 17 и 16, получаем, что в третьем полугодии в ситуации трехкратного наибольшего роста инфляции

$$\begin{aligned} C_{3,u^3}^N &= \frac{1}{1,038027} (0,060519 \cdot 10,687543 + 0,939481 \cdot 4,310879) \\ &= 4,524727, \end{aligned}$$

$$C_{3,u^3}^A = 28,82416 - 22,233396 = 6,712623,$$

в ситуации двукратного наибольшего роста инфляции и одного наименьшего роста инфляции

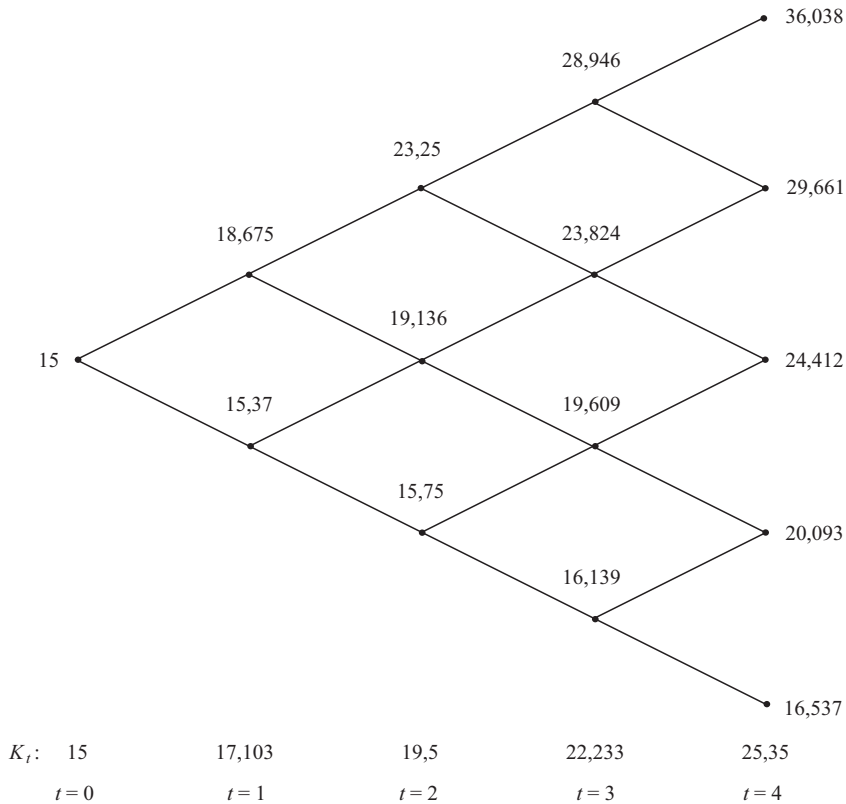


Рис. 16. Изменение рыночной цены контракта за четыре полугодия (млрд руб.)

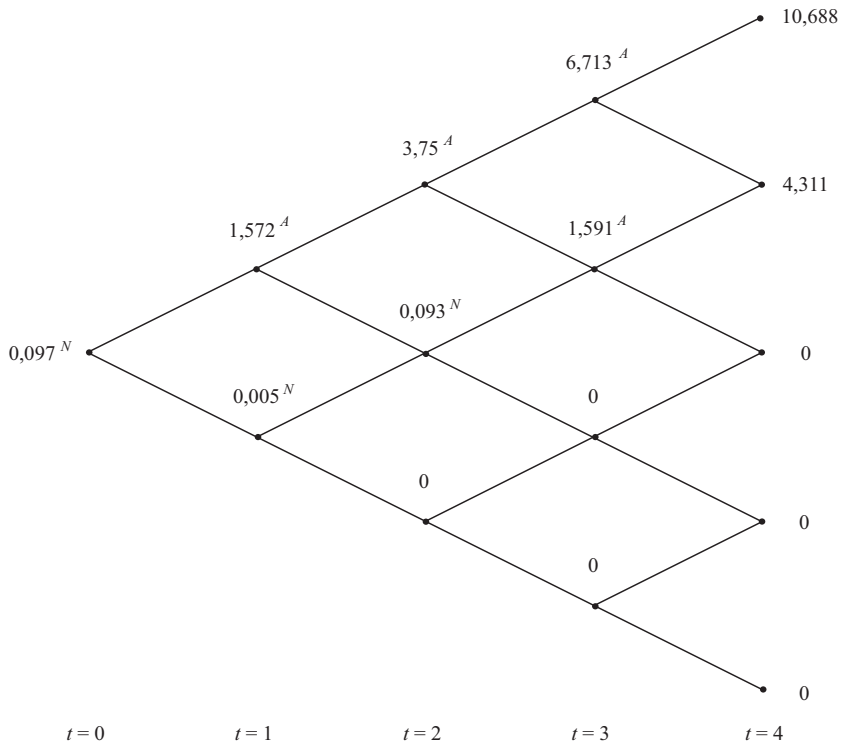


Рис. 17. Изменение цены реального опциона за четыре полугодия (млрд руб.)

$$C_{3,u^2d}^N = \frac{1}{1,038027}(0,060519 \cdot 4,310879 + 0,939481 \cdot 0) = 0,251333,$$

$$C_{3,u^2d}^A = 23,82416 - 22,233396 = 1,590764.$$

Остальные две ситуации в третьем полугодии согласно данным рис. 17 не просчитываются, так как цены опциона в четвертом полугодии, используемые для расчетов соответствующих цен опциона в третьем полугодии, равны нулю.

Для дальнейших расчетов во втором полугодии используются цены “мертвых” опционов в третьем полугодии как наибольшие, поскольку согласно данным примера всегда есть возможность досрочной реализации опционного контракта. Тогда во втором полугодии:

$$\begin{aligned} C_{2,u^2}^N &= \frac{1}{1,038027}(0,060519 \cdot 6,712623 + 0,939481 \cdot 1,590764) \\ &= 1,831102, \end{aligned}$$

$$C_{2,u^2}^A = 23,250002 - 19,499985 = 3,750017.$$

Выбирается “мертвый” опцион для расчетов в первом полугодии.

$$C_{2,ud}^N = \frac{1}{1,038027}(0,060519 \cdot 1,590764 + 0,939481 \cdot 0) = 0,092745,$$

$$C_{2,ud}^A = 0.$$

Выбирается “живой” опцион для расчетов в первом полугодии. В первом полугодии:

$$\begin{aligned} C_{1,u}^N &= \frac{1}{1,038027}(0,060519 \cdot 3,750017 + 0,939481 \cdot 0,092745) \\ &= 0,302573, \end{aligned}$$

$$C_{1,u}^A = 18,67485 - 17,370425 = 1,572225.$$

Выбирается “мертвый” опцион.

$$C_{1,d}^N = \frac{1}{1,038027}(0,060519 \cdot 0,092745 + 0,939481 \cdot 0) = 0,005407,$$

$$C_{1,d}^A = 0.$$

Выбирается “живой” опцион.

Наконец, в начале срока:

$$C_0^N = \frac{1}{1,038027} (0,060519 \cdot 1,572225 + 0,939481 \cdot 0,005407) = 0,096557.$$

Последняя цифра означает цену реального опциона в млрд руб. в настоящий момент времени.

Для кварталов входные параметры модели изменятся следующим образом:

$$\begin{aligned} r_u &= \sqrt[4]{1,55} - 1 = 0,115791, & r_d &= \sqrt[4]{1,05} - 1 = 0,012272, \\ r_f &= \sqrt[4]{1,0775} - 1 = 0,018836, & i &= \sqrt[4]{1,3} - 1 = 0,06779. \end{aligned}$$

Тогда получаем биномиальный процесс изменения рыночной цены контракта ( $S_t$ ) за восемь кварталов, представленный на рис. 18. На этом же рисунке показано изменение цены исполнения опциона ( $K_t$ ) по квартальной ставке  $i$ .

Используя формулу для  $C_t$ , можно последовательно рассчитать цены “живого” опциона, начиная с восьмого квартала и заканчивая настоящим моментом времени (рис. 19). Для этого сначала необходимо вычислить псевдовероятности  $p$  и  $1 - p$ :

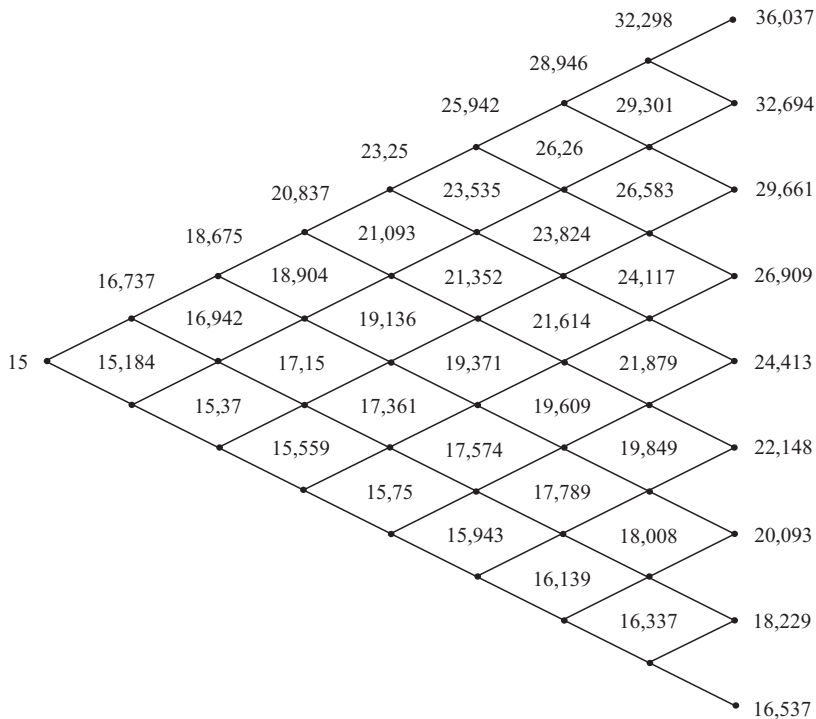
$$p = \frac{0,018836 - 0,012272}{0,115791 - 0,012272} = 0,063409, \quad 1 - p = 0,936591.$$

Тогда согласно данным рис. 19 и 18 получаем цену реального опциона в млрд руб. в настоящий момент времени:

$$C_0^N = 0,047336.$$

Практическая ценность таких вычислений заключается, во-первых, в том, что в итоге можно рассчитать цену реального опциона в настоящий момент времени, а во-вторых, в том, что согласно данным рис. 15, 17 и 19 в каждом периоде  $t$  можно принять оптимальное решение относительно того, исполнять опцион досрочно или выждать. Индексами  $A$  на рис. 15, 17 и 19 обозначены точки, где дороже “мертвый” опцион, т. е. ситуации, в которых опцион лучше исполнить досрочно, а индексами  $N$  — точки, где дороже “живой” опцион, т. е. ситуации, в которых лучше выждать.





$K_t$ :	15	16,017	17,103	18,262	19,5	20,822	22,233	23,741	25,35
	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$	$t=5$	$t=6$	$t=7$	$t=8$

Рис. 18. Изменение рыночной цены контракта за восемь кварталов (млрд руб.)

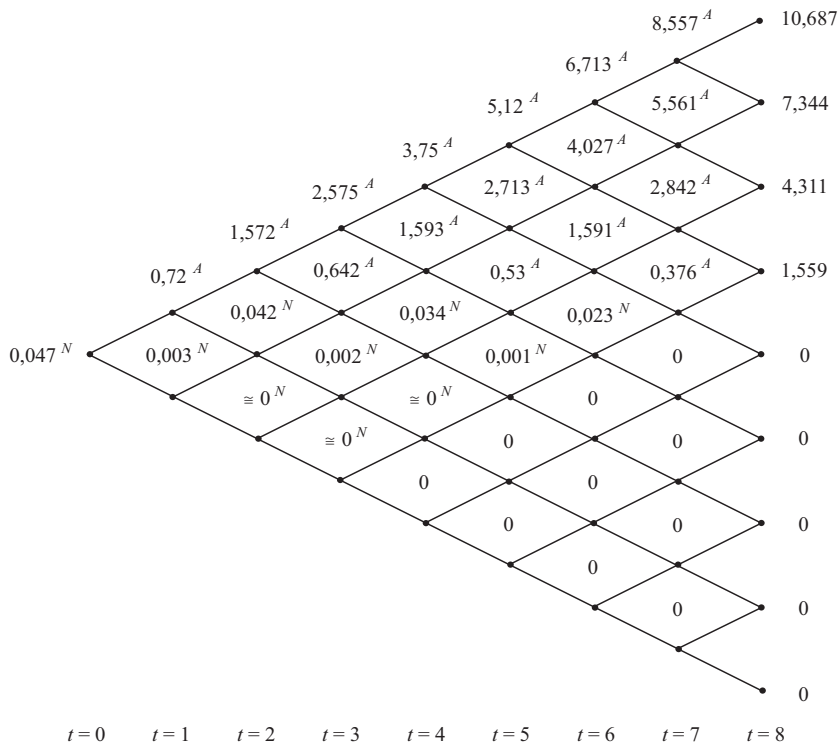


Рис. 19. Изменение цены реального опциона за восемь кварталов (млрд руб.)

Важным результатом является также то, что реальный NPV анализируемого контракта положителен в отличие от традиционного NPV. Так, например, для случая анализа годовых интервалов времени (рис. 15):

$$\begin{aligned} \text{реальный NPV} &= \\ &= \text{традиционный NPV} + \text{стоимость управленческого опциона} = \\ &= 0 + 0,191415 = 0,191415 \text{ (млрд руб.)}. \end{aligned}$$

Напомним, что нами рассматривается стоимость управленческого (реального) опциона, состоящая из затрат на проведение дополнительного исследования НИОКР и коммерческой эффективности 15 партий грузовиков КАМАЗ новой модели. Если со временем эта стоимость растет, то можно увеличить затраты на величину разницы между новой и старой стоимостью опциона. Можно также опцион выгодно перепродать другому инвестору.

Кроме того, сравнивая цены реальных опционов в настоящий момент времени в трех случаях: 1) годовые периоды времени, 2) полугодовые периоды и 3) квартальные периоды, можно сделать вывод, что большая временная гибкость контракта влечет за собой уменьшение неопределенности, что приводит в итоге к уменьшению цены реального опциона. Данный результат не противоречит классической теории опционов.

При всех выгодах реальных опционов их использование при инвестиционном проектировании влечет за собой определенные трудности, которые связаны с необходимостью изменения стратегии управления предприятием. Перечислим основные недостатки метода реальных опционов (ROV):

1. Необоснованный подход к стоимости создания и поддержания реальных опционов и неверная оценка вероятностей могут негативно повлиять на развитие предприятия.
2. Поддержание предприятием излишней гибкости в решениях может привести к частому пересмотру планов, потере направления развития и невыполнению стратегических планов.
3. Внедрение модели реальных опционов требует изменения внутренней культуры предприятия и подходов к ведению бизнеса. Ко-

гда принимается традиционное решение по началу проекта, то остановить уже начатый проект в большинстве случаев крайне невыгодно. Когда проект запускается на основе ROV, то в определенные точки времени необходимо снова принимать решения по проекту, вплоть до решения о его закрытии.

В заключение сформулируем полученные практические выводы:

1. Модель Блэка-Шоулза для оценки реальных опционов в условиях ограниченности информации о прогнозной доходности бизнеса не применима, поскольку в нее входит средне-квадратическое отклонение доходности контракта, которое точно спрогнозировать не представляется возможным. Кроме того, модель Блэка-Шоулза применима только для европейских опционов. На практике же необходима достаточная гибкость опционного контракта, которая подразумевает возможность исполнения опциона досрочно.
2. Для решения этой проблемы предлагаем применять биномиальную модель, модифицированную для условий высокого инвестиционного риска экономики России.
3. Первая модификация биномиальной модели заключается в изменении цены исполнения реального опциона через определенный период времени в зависимости от инфляции за соответствующее число прошедших периодов.
4. Вторая модификация заключается в практической возможности отследить моменты времени, выгодные для досрочного исполнения реального опциона.
5. Большая временная гибкость опционного контракта влечет за собой уменьшение неопределенности, что приводит в итоге к уменьшению цены реального опциона. Данный результат не противоречит классической теории опционов.

В складывающейся ситуации ведения бизнеса в настоящее время необходимы инвестиционные механизмы для работы предприятий в условиях неопределенности, созданной отсутствием данных о возможных изменениях свойств и стоимости предмета инвестирования, например, технологии, изделия или программного продукта,

а также условий ведения дела. Наиболее привлекательными с этой точки зрения являются механизмы, основанные на использовании реальных опционов. Расширение сферы применения опционов для инвестирования перспективных инновационных проектов позволит создать ряд интеллектуальных преимуществ формирования инновационной экономики.

### **3.2. Модернизация оборудования компании как азиатский реальный опцион с постоянной волатильностью бизнеса**

Реальный опцион на модернизацию оборудования является классическим “опционом на будущее развитие” [6]. При анализе перспектив будущего развития ценность опциона обычно прибавляется к ценности бизнеса или проекта, определенной по традиционной DCF-технологии. В качестве цены исполнения опциона  $K$  используются вложения капитала в развитие (расширение, тиражирование опыта). Текущая ценность базисного актива  $S_0$  — это приведенная к сегодняшнему дню оценка денежных потоков, которые генерируются бизнесом (довольно часто она меньше, чем цена исполнения). Время  $t$  в моделях применительно к реальным опционам — это срок, в течение которого можно принять решение о расширении бизнеса.

Реальный опцион модернизации оборудования должен быть азиатским, т. е. иметь переменную цену исполнения, например, в зависимости от инфляции, поскольку деньги, в том числе инвестиции, в разные моменты времени стоят по-разному.

Классический фондовый азиатский опцион — это разновидность опциона, при которой цена исполнения определяется на основе средней стоимости базисного актива за определенный период времени. Азиатский опцион еще называют опционом средней цены или среднекурсовым опционом. Как правило, такие опционы заключаются на товары, биржевые индексы, курсы валют и процентные ставки. Азиатские опционы популярны на рынках с высокой волатильностью базисных активов (нефть, цветные металлы и др.) [38].

Отличительная особенность опционов данного типа заключается в том, что цена исполнения (страйк) неизвестна на момент заключения контракта. Один из основных вариантов азиатских опционов

подразумевает плавающую цену страйк (она же плавающая ставка) азиатского опциона [38]. В этом случае цена колл-опциона:

$$C(T) = \max\{S(T) - kA(0, T), 0\},$$

где  $A(0, T)$  — среднее значение стоимости базисного актива;  
 $k$  — взвешивание (обычно 1 исключается из описаний).

Обычно  $A(0, T)$  — это среднее арифметическое. При постоянном мониторинге его вычисляют следующим образом:

$$A(0, T) = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt.$$

При дискретном мониторинге в моменты  $t_1, t_2, \dots, t_n$ :

$$A(0, T) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S(t_i).$$

Существуют также азиатские опционы, где среднее значение вычисляется как среднее геометрическое. При постоянном мониторинге его вычисляют по формуле:

$$A(0, T) = \exp \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt \right\}.$$

Азиатские опционы — это инвестиционные инструменты с умеренным уровнем риска. Так как цена опциона базируется на данных о цене на базисный актив за определенный период, то инвестор имеет возможность сделать рациональное суждение о целесообразности вложений.

В качестве примера рациональной постановки задачи оценки стоимости реального опциона (задачи ROV) будем рассматривать проект замены оборудования на гидрогеологическом бурении скважин [6]. Этот же пример будем рассматривать в дальнейшем для сравнения различных методов решения задачи ROV.

Итак, ООО “Водяной” оказывает услуги садовым товариществам Подмосковья по бурению скважин на воду. Всего на балансе ООО

“Водяной” десять буровых установок, работающих на различных объектах и в различных районах области. Директор фирмы рассматривает возможность существенной модернизации буровых агрегатов, которая позволит сократить текущие издержки, повысить производительность установок и соответственно получать больше заказов от потенциальных клиентов. Для решения поставленной задачи руководством фирмы решено провести обоснование модернизации.

Приведем исходные данные для расчетов по наиболее вероятному сценарию развития событий в расчете на один буровой агрегат (табл. 8).

Никаких дополнительных затрат и выгод, связанных с притоком рабочего капитала, в проекте нет. Норма амортизации техники составляет 20%, по истечении пятилетнего срока чистая ценность от ликвидации оборудования равна нулю.

Все расчеты проводились на реальной основе — в постоянном масштабе цен. Исходные финансовые данные для расчетов представлены в табл. 9.

Расчеты, проведенные финансовым директором по традиционной технологии, показывают невыгодность осуществления модернизации ни на одной, ни тем более на десяти буровых установках (табл. 10).

Каждый из проектов понижает богатство владельцев компании на 1 511,25 долл., что по ее меркам немалая сумма.

Вместе с тем у директора возникли большие сомнения в результатах расчетов, связанные с точностью предсказания денежных потоков. Дело в той неопределенности, которую несут в себе исходные допущения относительно:

- (1) количества заказов и связанных с этим текущих затрат на один пробуренный метр (возможна экономия на условно-постоянных расходах) и коэффициента использования оборудования;
- (2) безотказности работы новой техники и периодичности ремонта;
- (3) средней глубины пробуриваемых скважин (оплата происходит не по метражу, а по результату бурения — количеству продуктивных скважин) и др.

Таблица 8

## Исходные экономические данные для расчетов на один буровой агрегат

Наименование показателя	Значение показателя	
	Базовый вариант	Новая техника
Производительность, м/станко-смену	8,1	12,2
Коэффициент использования оборудования по времени	0,5	0,5
Среднее число смен в году	304	304
Средняя цена одного пробуренного метра, долл.	22	22
Средние текущие затраты на одну станко-смену, долл.	123,4	96,1
Чистые капитальные затраты, включая приобретение новых агрегатов за минусом чистой ликвидационной ценности старых, долл.	—	20 000

Таблица 9

## Исходные финансовые данные для расчетов на один буровой агрегат

Наименование показателя	Значение показателя (% в год)
WACC компании в реальном выражении	12
Безрисковая ставка	4
Ставка налога на прибыль в РФ	20



## Расчет денежного потока замены одного бурового агрегата

Наименование показателя	Значение показателя по годам					
	0	1	2	3	4	5
1. Производительность, м/станко-смену:		12,2	12,2	12,2	12,2	12,2
1.1. Новой техники		8,1	8,1	8,1	8,1	8,1
1.2. Базы сравнения		0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
2. Коэффициент использования оборудования		304	304	304	304	304
3. Среднее число смен в году		623,2	623,2	623,2	623,2	623,2
4. Дополнительный объем, м/год $((1.1 - 1.2) \times 2 \times 3)$		22	22	22	22	22
5. Средняя цена 1 метра, долл.		13 710,4	13 710,4	13 710,4	13 710,4	13 710,4
6. Дополнительная выручка в год, долл. $(4 \times 5)$						
7. Средние текущие затраты на 1 станко-смену, долл.:		123,4	123,4	123,4	123,4	123,4
7.1. Новой техники		96,1	96,1	96,1	96,1	96,1
7.2. Базы сравнения		304	304	304	304	304
8. Среднее число смен в году						

Наименование показателя	Значение показателя по годам					
	0	1	2	3	4	5
9. Дополнительные текущие затраты, долл. в год ((7.1 – 7.2) × 8)		8 299,2	8 299,2	8 299,2	8 299,2	8 299,2
10. Дополнительные кап. затраты, долл.	-20 000					
11. Норма амортизации, %		20	20	20	20	20
12. Амортизация дополнительных кап. вложений, долл.		4 000	4 000	4 000	4 000	4 000
13. Дополнительная прибыль в год, долл. (6 – 9 – 12)		1 411,2	1 411,2	1 411,2	1 411,2	1 411,2
14. Налог на прибыль (20%), долл.		282,24	282,24	282,24	282,24	282,24
15. Чистый денежный поток проекта (CF), долл. (13 – 14 + 12)	-20 000	5 128,96	5 128,96	5 128,96	5 128,96	5 128,96
16. WACC, %		12	12	12	12	12
17. NPV проекта, долл.	-1 511,25	Результат дисконтирования CF по ставке 12%				

В результате точность расчета эффекта имеет средне-квадратическое отклонение  $\sigma = 40,33\%$  (средне-статистическое  $\sigma$  (%) в долл. США для отрасли “Машиностроение”) ([www.finmanager.ru](http://www.finmanager.ru)).

Чтобы не рисковать всем бизнесом в целом и получить более точную информацию о результатах проекта, директор ООО “Водяной” решает провести эксперимент: несмотря на негативные результаты расчетов, осуществить модернизацию на одном из буровых агрегатов. Если результат окажется удачным (что будет ясно в течение года), можно будет тиражировать опыт на прочих 9 установках.

Этот подход вызвал умеренно-негативную реакцию со стороны финансового директора — он расценил данное решение как недоверие к качеству проведенных им расчетов. Чтобы его успокоить, пришлось выписать ему премию и отправить в краткосрочный отпуск.

Однако остался вопрос: чья позиция в данной ситуации оказалась более обоснованной — директора или его заместителя по финансам?

Итак, пилотный проект дает нам информацию о том, что может произойти с последующими девятью, и раскрывает неопределенность. Фактически он дает право в течение года вложить деньги еще в девять таких проектов при благоприятных для этого обстоятельствах (положительным результате пилотного проекта). Это право представляет собой колл-опцион на 9 проектов (или 9 опционов, каждый на 1 проект).

Кроме всего прочего следует учесть, что со временем деньги обесцениваются даже за срок в один год. Эта проблема особенно актуальна для развивающихся рынков, каковым является Россия. Однако поскольку финансовые расчеты производятся в долл. США, в дальнейших расчетах необходимо учитывать ставку инфляции в России, взятую в долл. США, которая в среднем за последние годы составляет 3% в год. С учетом этого фактора цена исполнения опциона через год составит величину  $K = 20\,600$  долл. Таким образом, мы приходим к модели азиатского опциона, т. е. опциона с изменяющейся ценой исполнения (в данном случае по ставке инфляции).

Также важно отметить, что при вычислении стоимости опциона мы будем использовать риск-нейтральный подход, поскольку он не предполагает вычисление WACC в каждом отдельном году и не

нуждается в расчете реальных вероятностей переходов в пространстве событий.

## Решение задачи с использованием модели Блэка–Шоулза

К основным проблемам использования модели Блэка–Шоулза (ОРМ) для оценки реальных опционов необходимо отнести следующие [10, 14, 21, 22, 59]:

1. В ОРМ входит  $\sigma$  доходности контракта, которое точно спрогнозировать не представляется возможным.
2. Если  $\sigma$  прогнозируется экспертами, то возникает проблема достоверности прогноза.
3. ОРМ применима только для европейских опционов.
4. ОРМ создана для условий и ограничений фондового рынка.

Первая проблема особенно актуальна для развивающегося рынка, каковым является Россия. Ее мы решаем, переходя к финансовым расчетам в долл. США. Таким образом, мы можем использовать, как уже указывалось нами ранее, средне-статистическое  $\sigma$  (%) в долл. США для отрасли “Машиностроение”. В целях еще большего уточнения расчетов мы можем его еще скорректировать для условий реализации проекта в России. Однако сама по себе такая корректировка также обладает своей неопределенностью, которую опять же точно оценить проблематично. В данном случае действует один из основных принципов оценки волатильности, который используется в стохастической финансовой математике, а именно, принцип “волатильность сама по себе волатильна” [17].

Вторая проблема также обусловлена условиями реализации проекта в России. Здесь субъективные оценки экспертов тоже значительно волатильны.

Третья проблема накладывает уже более серьезный отпечаток на достоверность оценки стоимости реального опциона, поскольку в реальности мы подразумеваем, что можем его исполнить, когда захотим (в пределах анализируемого срока опциона). Таким образом,

разумнее анализировать американский опцион. Однако, как указывают многие авторы, например, М. А. Лимитовский [6], в этом случае ОРМ может быть применена для консервативной оценки американского реального опциона, т. е. цена европейского опциона является нижним пределом для цены американского опциона с такими же условиями выпуска.

Четвертая проблема, пожалуй, наиболее серьезная, однако приближенно ее можно решить тем же методом, что и третью.

Формальная запись ОРМ, выведенной для оценки премии по европейскому колл-опциону [32], выглядит следующим образом:

$$C_0 = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2), \quad (17)$$

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}}, \quad (18)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}, \quad (19)$$

где  $C_0$  — текущая цена колл-опциона;

$S_0$  — текущая цена базисного актива (предполагается, что актив не приносит текущего дохода, т. е. дивиденда или купона);

$K$  — цена исполнения опциона (цена “strike”);

$r$  — непрерывная годовая ставка безрисковой доходности (сила роста);

$T$  — время до исполнения опциона (в годах);

$\sigma$  — средне-квадратическое отклонение цены базисного актива за год;

$N(d)$  — кумулятивная функция нормального распределения.

Заметим, что  $\sigma$  в рассматриваемом примере не меняется по причине короткого срока реального опциона — один год. Таким образом, оцениваем азиатский реальный опцион с постоянной волатильностью бизнеса. Прделаем это в табл. 11 по формулам (17)–(19).

Таким образом, прав оказался директор ООО “Водяной”: несмотря на кажущуюся невыгодность модернизации, эксперимент вполне оправдан.

Таблица 11  
Оценка азиатского реального опциона с постоянной волатильностью  
бизнеса с использованием ОРМ

Параметры и показатели	Значения параметров и показателей
Количество опционов в проекте	9
$S_0$ по каждому опциону, долл.	18 488,75 (PV денежных притоков проекта)
$K$ по каждому опциону, долл.	20 600 (инвестиции)
$r$	0,04 (безрисковая непрерывная ставка)
$T$	1 (срок опционов — 1 год)
$\sigma$	0,4033
$d_1$	0,029678
$d_2$	-0,370322
$N(d_1)$	0,511871
$N(d_2)$	0,355581
$C_0$ , долл.	2 426,1
NPV проекта с опционами, долл.	$20\,323,67 = 2\,426,1 \cdot 9 - 1\,511,25$

## Решение задачи с использованием биномиальной модели

В целях уточнения расчетов ROV в нашем примере необходимо решить оставшиеся две проблемы, которые мы имели в модели Блэка–Шоулза (ОПМ):

1. ОПМ применима только для европейских опционов.
2. ОПМ создана для условий и ограничений фондового рынка.

Их можно решить, используя в расчетах, например, биномиальную модель, несколько модифицированную нами [10, 14, 21, 22, 59]. Первая модификация заключается в изменении цены исполнения реального опциона через определенный период времени в зависимости от инфляции за соответствующее число прошедших периодов. Вторая модификация заключается в практической возможности отследить моменты времени, выгодные для досрочного исполнения реального опциона, т. е. в определении узлов биномиального дерева, где цена “мертвого” (исполненного) опциона выше цены “живого” (не исполненного) опциона.

Применим данную модифицированную биномиальную модель к решению задачи ROV модернизации оборудования. Главной особенностью ее применения является адекватный переход от непрерывного процесса к дискретному, используя для этого уже известную нам постоянную волатильность  $\sigma$ .

Классический подход (CRR-модель) [41] предполагает переход согласно уравнениям:

$$\begin{aligned}u &= e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \\d &= e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \\p &= \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d},\end{aligned}$$

где  $u$  — темп повышения стоимости базисного актива;

$d$  — темп понижения стоимости базисного актива;

$p$  — псевдовероятность события  $u$ ;

$1 - p$  — псевдовероятность события  $d$ ;

$\sigma$  — средне-квадратическое отклонение цены базисного актива за год;

$\Delta t$  — временной шаг между узлами биномиальной решетки (в годах);

$r$  — непрерывная годовая ставка безрисковой доходности (сила роста).

Крупнейшим недостатком CRR-модели является то, что она теряет устойчивость, если  $\Delta t > \sigma^2/r^2$ , и, как следствие, в расчетах могут возникнуть отрицательные псевдовероятности [80].

В целях более точного моделирования с более длительным временным шагом биномиальное дерево согласно точке зрения Ябура, Крамина и Янга [57], и Халла [54] может быть построено в соответствии с уравнениями:

$$u = e^{\sqrt{e^{\sigma^2 \Delta t} - 1} + r \Delta t}, \quad (20)$$

$$d = e^{-\sqrt{e^{\sigma^2 \Delta t} - 1} + r \Delta t}, \quad (21)$$

$$p = \frac{e^{r \Delta t} - d}{u - d}. \quad (22)$$

Это дерево можно рассматривать в качестве дополнения к CRR-параметризации. В этом случае, оба скачка — вверх ( $u$ ) и вниз ( $d$ ) немного изменяются. В результате центральная линия дерева следует безрисковой ставке. Еще одним преимуществом является то, что эта параметризация также всегда стабильна независимо от длины временного шага  $\Delta t$  [50].

Используя модель (20)–(22) для  $\Delta t = 0,25$  года, получаем следующую параметризацию в рассматриваемом нами примере:

$$\begin{aligned} u &= 1,236169, & d &= 0,825293, \\ p &= 0,449666, & 1 - p &= 0,550334. \end{aligned}$$

В результате согласно значениям  $u$  и  $d$  получаем биномиальное дерево для изменения стоимости  $S_t$  базисного актива (PV денежных притоков пилотного проекта) в долл. (рис. 20). На этом же рисунке отобразим изменение цены исполнения опциона ( $K_t$ ) по квартальной ставке инфляции  $i = \sqrt[4]{1,03} - 1 = 0,007417$ .



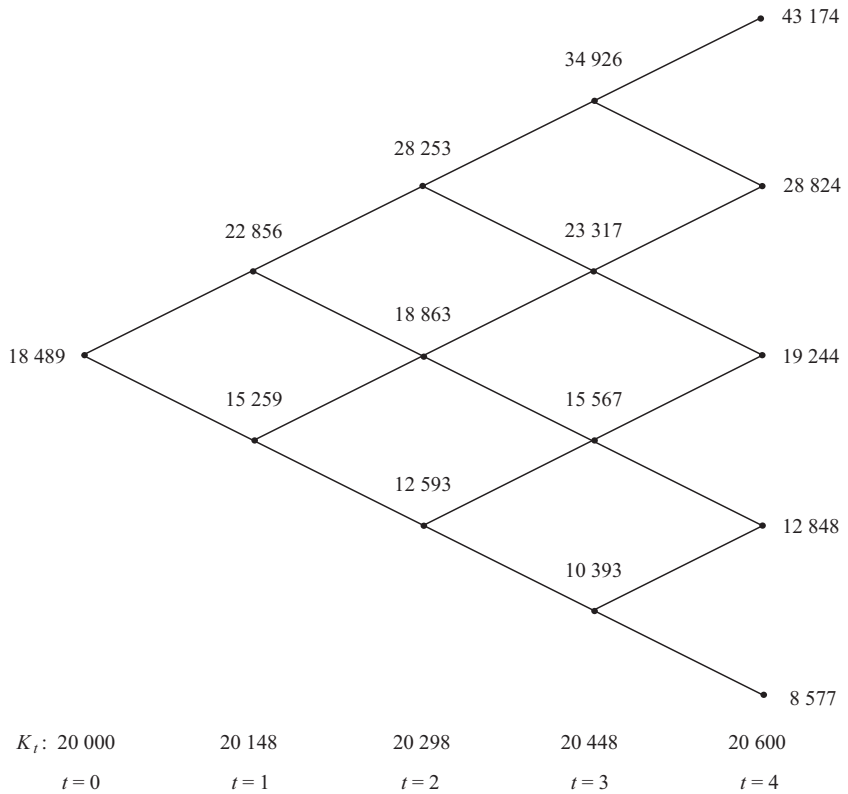


Рис. 20. Биномиальное дерево изменения цены базисного актива (долл.)

В биномиальной CRR-модели цену “живого” опциона [4] можно рассчитать по формуле

$$C_t^N = \frac{p C_{t+1,u} + (1-p) C_{t+1,d}}{e^{r\Delta t}}. \quad (23)$$

Таким образом, можно оценить стоимость опциона в любом периоде  $t$ , если известны  $C_{t+1,u}$  и  $C_{t+1,d}$  в следующем периоде  $t+1$ .

Поскольку мы рассматриваем колл-опцион, то в каждом периоде  $t$  цена “мертвого” опциона [5] вычисляется по формуле

$$C_t^A = \max\{S_t - K_t, 0\}. \quad (24)$$

Используя формулы (23) и (24), можно последовательно рассчитать цены опциона, начиная с четвертого квартала и заканчивая настоящим моментом времени (рис. 21). При этом в каждом узле биномиального дерева в целях последовательного расчета из цен  $C_t^N$  и  $C_t^A$  выбирается максимальная.

Например, в 3-м квартале ( $t = 3$ ) в самом верхнем узле цена опциона вычисляется следующим образом. Сначала по формуле (23) рассчитывается цена “живого” опциона:

$$\begin{aligned} C_{3,u^3}^N &= \frac{0,449666(43\,174 - 20\,600) + 0,550334(28\,824 - 20\,600)}{e^{0,04 \cdot 0,25}} = \\ &= 14\,531 \text{ (долл.)}. \end{aligned}$$

Затем по формуле (24) вычисляется цена “мертвого” опциона:

$$C_{3,u^3}^A = 34\,926 - 20\,448 = 14\,478 \text{ (долл.)}.$$

Дороже получился “живой” опцион, поэтому его цена выбирается с целью вычисления более ранней цены опциона.

По этому принципу строится все биномиальное дерево на рис. 21. При этом в нашем примере получилось, что везде выгоднее для инвестора “живой” опцион. Однако на практике может возникнуть и другая ситуация, т. е. в каких-то узлах дерева может быть дороже “мертвый” опцион, что свидетельствует о необходимости его досрочного исполнения в данном узле. На это может повлиять ставка

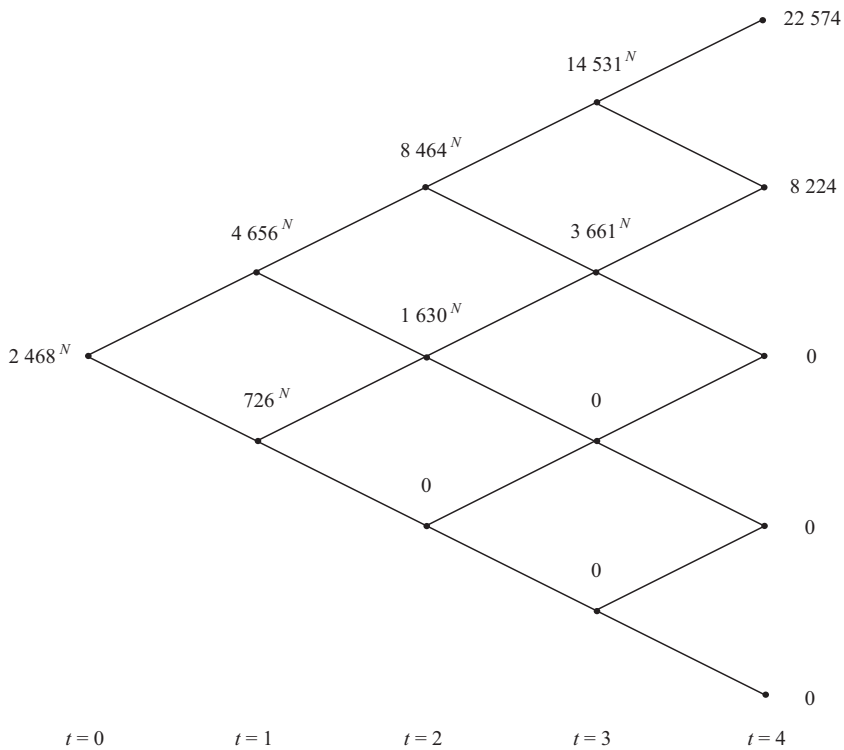


Рис. 21. Биномиальное дерево изменения цены реального опциона (долл.)

инфляции  $i$ , которая изменит цены исполнения опциона  $K_t$ . Также подобный эффект может дать изменение параметров  $u$  и  $d$ .

В результате, работая по дереву от его конца к началу, мы можем получить цену данного опциона пилотного проекта в нуле. Она составит величину  $C_0 = 2\,468$  долл. Тогда NPV проекта модернизации оборудования с 9-ю опционами составит

$$\text{NPV} = 2\,468 \cdot 9 - 1\,511,25 = 20\,700,75 \text{ (долл.)},$$

что несколько больше результата расчета согласно ОРМ. Это уточненная оценка эффекта проекта.

### Решение задачи с использованием триномиальной модели

Применение биномиальной CRR-модели, пусть даже и уточненной с помощью уравнений (20)–(22), обладает определенным набором недостатков, связанных прежде всего с ситуацией изменения волатильности бизнеса во времени [50]. Однако есть также существенный недостаток, заключающийся в том, что в случае очень малой или даже несуществующей волатильности в течение некоторого периода времени любое движение отклонения цены базисного актива вверх или вниз от ожидаемого значения в будущем, т. е. увеличения по безрисковой ставке ( $S_{t+1,m} = S_{t,m} e^{r\Delta t}$ ), сделает построение биномиального дерева невозможным [50].

Триномиальное дерево построено при одновременном выборе таких параметров, которые устанавливают разумное пространство состояний, имея в виду разумные вероятности перехода между узлами дерева. Кроме того, рекомбинация дерева установлена так, что  $ud = du = m^2 = e^{2r\Delta t}$ , потому что в противном случае повышение дискретности системы не будет приводить к небольшой или даже нулевой волатильности. Триномиальное дерево всегда стабильно независимо от длины шага во времени. Уравнения для описания стохастических процессов движений вверх и вниз являются более точными, даже с более длинными шагами во времени. Это необходимо потому, что временные шаги для оценки реального опциона выбираются, исходя из управленческой практичности, так, чтобы они были длиннее, чем это обычно бывает в финансовых опционах.

Триномиальные деревья являются другим дискретным представлением движения цены базисного актива, аналогичным биномиальным деревьям. Триномиальные решетки имеют три параметра скачков  $u$ ,  $m$  и  $d$  и три соответствующие им вероятности  $p_u$ ,  $p_m$  и  $p_d$ . В течение этого времени шаг цены актива может перейти к одному из трех узлов: с вероятностью  $p_u$  в верхний узел до значения  $S_u$ , с вероятностью  $p_m$  к середине узла до значения  $S_m$  и в нижний узел до значения  $S_d$  с вероятностью  $p_d$ . Мы предполагаем, что сумма вероятностей равна единице, поэтому мы устанавливаем  $p_m = 1 - p_u - p_d$ . В конце каждого шага во времени есть пять неизвестных параметров: две вероятности  $p_u$  и  $p_d$  и три узла цены  $S_u$ ,  $S_m$  и  $S_d$ .

При этом небольшая модификация, предложенная Ябуром, Крамином и Янгом [57], и Халлом [54], заключается в использовании более точной оценки отклонения в соответствии с уравнением

$$\sqrt{e^{\sigma^2 \Delta t} - 1} \approx \sigma \sqrt{\Delta t}$$

вместо  $\sigma \sqrt{\Delta t}$ . После этих изменений, согласно точке зрения Хаателы [50], построение параметра триномиальной решетки приводит к улучшенной общей форме параметризации для всех вероятностей переходов и размеров скачков  $u$ ,  $m$  и  $d$  в соответствии с уравнениями:

$$p_u = \frac{m^2(V - 1)}{u^2 + md - um - ud}, \quad (25)$$

$$p_d = p_u \frac{m - u}{d - m}, \quad (26)$$

$$p_m = 1 - p_u - p_d, \quad (27)$$

$$u = e^{r\Delta t + \sqrt{e^{(\lambda\sigma)^2 \Delta t} - 1}}, \quad (28)$$

$$d = e^{r\Delta t - \sqrt{e^{(\lambda\sigma)^2 \Delta t} - 1}}, \quad (29)$$

$$m = e^{r\Delta t}, \quad (30)$$

$$V = e^{\sigma^2 \Delta t}, \quad (31)$$

где оправданное значение дисперсионного параметра  $\lambda$  составляет 1,12 [50]. Это делает пространство состояний плотным и обеспе-

чивает достаточно хорошие вероятности переходов между узлами триномиальной решетки (дерева).

Движения вверх (28) и вниз (29), которые определяют пространство состояний, рассчитываются в соответствии с наибольшей волатильностью в течение инвестиций так, что  $\sigma = \max \sigma_t$ . Эти значения  $u$  и  $d$  используются для всего пространства состояний в течение всех периодов времени независимо от изменения волатильности. Тем не менее, вероятности перехода, вычисленные в соответствии с (25)–(27), справедливы только для периода времени с наивысшей волатильностью. В нашем примере предполагается постоянная во времени волатильность бизнеса, что существенно упрощает наши расчеты.

Используя модель (25)–(31) для  $\Delta t = 0,25$  года, получаем следующую параметризацию в рассматриваемом нами примере:

$$\begin{aligned} u &= 1,267238, & d &= 0,805059, & m &= 1,01005, & V &= 1,040811, \\ p_u &= 0,350268, & p_d &= 0,439457, & p_m &= 0,210275. \end{aligned}$$

В результате согласно значениям  $u$ ,  $m$  и  $d$  получаем триномиальное дерево для изменения стоимости  $S_t$  базисного актива (PV денежных притоков пилотного проекта) в долл. (табл. 12). В этой же таблице покажем изменение цены исполнения опциона ( $K_t$ ) по квартальной ставке инфляции  $i = \sqrt[4]{1,03} - 1 = 0,007417$ .

В триномиальной модели цену “живого” опциона можно рассчитать по формуле [50]

$$C_t^N = \frac{p_u C_{t+1,u} + p_m C_{t+1,m} + p_d C_{t+1,d}}{e^{r\Delta t}}. \quad (32)$$

Таким образом, можно оценить стоимость опциона в любом периоде  $t$ , если известны  $C_{t+1,u}$ ,  $C_{t+1,m}$  и  $C_{t+1,d}$  в периоде  $t + 1$ .

Поскольку мы рассматриваем колл-опцион, то в каждом периоде  $t$  цена “мертвого” опциона ( $C_t^A$ ) вычисляется так же, как и в случае биномиальной модели, т. е. по формуле (24).

Используя формулы (32) и (24), можно последовательно рассчитать цены опциона, начиная с четвертого квартала и заканчивая настоящим моментом времени (табл. 13). При этом в каждом узле триномиальной решетки, как и биномиальной, в целях последовательного расчета из цен  $C_t^N$  и  $C_t^A$  выбирается максимальная.

Таблица 12

**Триномиальная решетка изменения цены  
базисного актива (долл.)**

	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$
$S_t$					47 681
				37 626	28 004
			29 691	29 989	30 291
		23 430	23 665	23 903	24 144
	18 489	18 675	18 862	19 052	19 244
		14 885	15 035	15 186	15 338
			11 983	12 103	12 225
				9 647	9 744
				7 766	
$K_t$	20 000	20 148	20 298	20 448	20 600

Таблица 16

**Триномиальная решетка изменения цены  
реального опциона (долл.)**

	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$
$C_t$					27 081
				$17\,231^N$	17 404
			$9\,756^N$	$9\,595^N$	9 691
		$5\,094^N$	$4\,715^N$	$4\,098^N$	3 544
	$2\,510^N$	$2\,170^N$	$1\,677^N$	$1\,229^N$	0
		$670^N$	$426^N$	0	0
			0	0	0
				0	0
				0	

Например, в 3-м квартале ( $t = 3$ ) в самом верхнем узле цена опциона вычисляется следующим образом. Сначала по формуле (32) рассчитывается цена “живого” опциона:

$$C_{3,u^3}^N = [0,350268 (47\,681 - 20\,600) + 0,210275 (38\,004 - 20\,600) + 0,439457 (30\,291 - 20\,600)] e^{-0,04 \cdot 0,25} = 17\,231 \text{ (долл.)}.$$

Затем по формуле (24) вычисляется цена “мертвого” опциона:

$$C_{3,u^3}^A = 37\,626 - 20\,448 = 17\,178 \text{ (долл.)}.$$

Дороже получился “живой” опцион, поэтому его цена выбирается с целью вычисления более ранней цены опциона.

По этому принципу строится все триномиальное дерево в табл. 13. При этом в нашем примере снова получилось, что везде выгоднее для инвестора “живой” опцион. Возможность возникновения другой ситуации описана нами ранее для биномиального дерева.

В результате, работая по дереву от его конца к началу, мы можем получить цену данного опциона пилотного проекта в нуле. Она составит величину  $C_0 = 2\,510$  долл. Тогда NPV проекта модернизации оборудования с 9-ю опционами составит

$$NPV = 2\,510 \cdot 9 - 1\,511,25 = 21\,078,75 \text{ (долл.)},$$

что даже больше результата расчета согласно биномиальной модели. Это еще более точная оценка эффекта проекта.

Проведем сравнение результатов трех описанных моделей оценки азиатского реального опциона модернизации оборудования компании с постоянной волатильностью бизнеса. Напомним, что в целях анализа использовались три модели: 1) модель Блэка–Шоулза (ОРМ); 2) биномиальная модель (ВТМ); 3) триномиальная модель (ТТМ).

Сравнение цен опциона в исследуемом примере дает следующие результаты:

$$C_0 = \left\{ \begin{array}{l} 2\,426 \\ \text{(ОРМ)} \end{array} < \begin{array}{l} 2\,468 \\ \text{(ВТМ)} \end{array} < \begin{array}{l} 2\,510 \\ \text{(ТТМ)} \end{array} \right\}.$$



Тогда NPV проекта модернизации оборудования компании с 9-ю опционами составит:

$$NPV = \left\{ \begin{array}{ccc} 20\,324 & < & 20\,701 & < & 21\,079 \\ \text{(ОРМ)} & & \text{(ВТМ)} & & \text{(ТТМ)} \end{array} \right\}.$$

Данные результаты позволяют сделать следующие выводы:

1. Модель Блэка–Шоулза, действительно, является нижним пределом для цены американского опциона с такими же условиями выпуска, как и европейский.
2. При постоянной волатильности бизнеса  $\sigma$ , что позволяет нам сделать условие существования опциона в течение всего одного года, разница в оценках по разным моделям незначительна.
3. Реальный опцион модернизации оборудования должен быть азиатским, т. е. иметь переменную цену исполнения, например, в зависимости от инфляции, поскольку деньги, в том числе инвестиции, в разные моменты времени стоят по-разному.
4. В промежуточных расчетах в узлах деревьев всегда необходимо сравнивать цену “живого” и “мертвого” опциона и выбирать тот, который дороже. Это позволяет кроме всего прочего отследить возможности досрочной реализации опциона.
5. Наиболее важным практическим выводом является то, что наиболее точную оценку азиатского реального опциона с постоянной волатильностью бизнеса позволяет получить тринომiальная модель. В исследуемом примере денежный выигрыш за счет этого незначителен, однако на практике могут возникнуть ситуации, в которых выигрыш может быть большим вплоть до того, что разные модели могут привести как к положительным, так и к отрицательным NPV с опционами. А это, в свою очередь, существенно повлияет на принятие управленческого решения в отношении инвестиций.

### 3.3. Влияние инфляции на изменение стоимости азиатского реального опциона

Основным лозунгом применения реальных опционов в бизнесе является фраза “риск — не угроза, а ресурс”. Он является, действительно, справедливым, поскольку именно реальные опционы повышают инвестиционную привлекательность инновационных проектов в силу возникающей при этом гибкости в отношении управленческих решений. Однако использовать данный ресурс следует разумно, для чего требуется достаточная точность финансовой оценки реального опциона. Именно по этой причине зарубежные технологии использования реальных опционов нельзя напрямую переносить на российский финансовый рынок. Их следует адаптировать прежде всего по двум наиболее важным направлениям:

- (1) дальнейшая адаптация финансовых опционов к условиям производства таким образом, чтобы превратить их в адекватные производству реальные опционы;
- (2) учет фактора повышенного риска российского рынка посредством применения на практике реальных *азиатских* опционов, т. е. опционов с изменяющейся ценой исполнения.

Одним из базовых отличий реальных опционов от традиционных технологий инвестиционного анализа является то, что для их оценки не требуется знать цену капитала инвестиционного или инновационного проекта. В силу применяемого в них риск-нейтрального подхода требуется знать лишь безрисковую ставку по инвестициям. За рубежом подобный ориентир всегда имеется в распоряжении финансовых аналитиков. Например, в США в качестве такового применяется ставка по казначейским облигациям. В других развитых странах часто применяют ставку LIBOR. В России решение этого вопроса гораздо сложнее, т. к. даже государственные облигации не считаются абсолютно безрисковыми. Поэтому за неимением лучшего практики нередко предпочитают брать в качестве безрисковой ставки ставку рефинансирования. Но такой подход может и, действительно, должен исказить результаты оценки реальных опционов. Причина заключается в том, что за рубежом инфляция несколько превышает

безрисковую ставку, а в России наоборот — реальная инфляция превышает ставку рефинансирования. Под реальной здесь мы понимаем инфляцию, рекомендованную М. А. Лимитовским [6]. Он предлагает для анализа брать ставку инфляции в России 25–30% годовых. Как известно, настоящая ставка рефинансирования в России составляет 8,25% годовых, что и порождает рассматриваемый нами финансовый парадокс.

Как будет показано далее, обозначенный парадокс приводит к тому, что, используя для оценки проекта *азиатский* реальный опцион, мы получаем в результате в узлах биномиальной и триномиальной решеток в качестве более высокой цены реального опциона достаточно часто цену “мертвого”, а не “живого” опциона. Ранее мы показали, что наиболее точным методом оценки реальных опционов является триномиальная модель (по сравнению с моделью Блэка–Шоулза и биномиальной моделью). Действительно, чем больше мы можем знать о будущем, тем точнее будет прогнозирование цены опциона. В этом как раз и заключается преимущество триномиальной решетки по сравнению с биномиальной. Модель же Блэка–Шоулза может применяться в качестве пессимистической оценки реального опциона [6]. При этом рассматриваемый пример дал нам в качестве наиболее высокой оценки опциона как раз наиболее реалистичную, т. е. основанную на триномиальной решетке. Ответ на вопрос, будет ли этот результат таким же в случае рассматриваемого нами финансового парадокса, является темой дальнейшего исследования.

Итак, каждый из 10 проектов модернизации оборудования ООО “Водяной” понижает богатство владельцев на  $NPV = -1\,511,25$  долл. Однако один пилотный проект дает нам информацию о том, что может произойти с последующими девятью, и раскрывает неопределенность. Это право представляет собой колл-опцион на 9 проектов (или 9 опционов, каждый на 1 проект).

Кроме всего прочего следует учесть, что со временем деньги обесцениваются, даже за срок, равный одному году. Эта проблема особенно актуальна для развивающихся рынков, каковым является Россия. Таким образом, мы приходим к модели азиатского опциона, т. е. опциона с изменяющейся ценой исполнения (в данном случае по ставке инфляции  $i = 25\%$  годовых).

Для того, чтобы учесть все необходимые для расчетов российские экономические особенности, следует входные параметры данного примера пересчитать в рублях. Предположим, что оценка производится в июле 2013 г., когда доллар стоил примерно 32,5 руб. Тогда текущая цена базисного актива (PV денежных притоков проекта) составит

$$S_0 = 18\,488,75 \cdot 32,5 = 600\,884 \text{ (руб.)}.$$

Цена исполнения опциона (инвестиции в проект) на конец года с учетом инфляции будет равна

$$K = 20\,000 \cdot 32,5 \cdot 1,25 = 812\,500 \text{ (руб.)}.$$

Непрерывная годовая ставка безрисковой доходности (сила роста) равна

$$r = \ln(1 + r_f) = \ln 1,0825 = 0,079273 \text{ (7,9273\%)}.$$

Средне-квадратическое отклонение цены базисного актива за год также необходимо пересчитать с учетом коэффициента корректировки на риск для России, равного 1,85 (*www.finmanager.ru*):

$$\sigma = 0,4033 \cdot 1,85 = 0,746105 \text{ (74,6105\%)}.$$

Наконец, NPV проекта без опционов составит

$$\text{NPV} = -1\,511,25 \cdot 32,5 = -49\,116 \text{ (руб.)}.$$

Теперь оценим опцион в рублях, используя для этого три модели: 1) модель Блэка–Шоулза (ОРМ); 2) биномиальная модель (ВТМ); 3) тринომiальная модель (ТТМ).

### **Решение задачи с использованием модели Блэка–Шоулза**

В рассматриваемом примере  $\sigma$  не меняется по причине короткого срока реального опциона — один год. Поэтому оцениваем азиатский реальный опцион с постоянной волатильностью бизнеса. Проделаем это в табл. 14 по формулам (17)–(19).

Таблица 14

Оценка азиатского реального опциона с постоянной волатильностью  
бизнеса с использованием ОРМ

Параметры и показатели	Значения параметров и показателей
Количество опционов в проекте	9
$S_0$ по каждому опциону, руб.	600 884 (PV денежных притоков проекта)
$K$ по каждому опциону, руб.	812 500 (инвестиции)
$r$	0,079273 (безрисковая непрерывная ставка)
$T$	1 (срок опционов — 1 год)
$\sigma$	0,746105
$d_1$	0,074916
$d_2$	-0,671189
$N(d_1)$	0,529866
$N(d_2)$	0,251034
$C_0$ , руб.	129 966
NPV проекта с опционами, руб.	$1\ 120\ 578 = 129\ 966 \cdot 9 - 49\ 116$

## Решение задачи с использованием биномиальной модели

Используя модель (20)–(22) для  $\Delta t = 0,25$  года, получаем следующую параметризацию в рассматриваемом нами примере:

$$\begin{aligned}u &= 1,501154, & d &= 0,693088, \\p &= 0,404581, & 1 - p &= 0,595419.\end{aligned}$$

В результате согласно значениям  $u$  и  $d$  получаем биномиальное дерево для изменения стоимости  $S_t$  базисного актива (PV денежных притоков пилотного проекта) в руб. (рис. 22). На этом же рисунке отобразим изменение цены исполнения опциона ( $K_t$ ) по квартальной ставке инфляции  $i = \sqrt[4]{1,25} - 1 = 0,057371$ .

Используя формулы (23) и (24), можно последовательно рассчитывать цены опциона, начиная с четвертого квартала и заканчивая настоящим моментом времени (рис. 23). При этом в каждом узле биномиального дерева в целях последовательного расчета из цен  $C_t^N$  и  $C_t^A$  выбирается максимальная.

В результате, работая по дереву от его конца к началу, мы можем получить цену данного опциона пилотного проекта в нуле. Она составит величину  $C_0 = 144\,056$  руб. Тогда NPV проекта модернизации оборудования с 9-ю опционами составит

$$\text{NPV} = 144\,056 \cdot 9 - 49\,116 = 1\,247\,388 \text{ (руб.)},$$

что несколько больше результата расчета согласно ОРМ. Это уточненная оценка эффекта проекта.

## Решение задачи с использованием триномиальной модели

Используя модель (25)–(31) для  $\Delta t = 0,25$  года, получаем следующую параметризацию в рассматриваемом нами примере:

$$\begin{aligned}u &= 1,578623, & d &= 0,659076, & m &= 1,020016, & V &= 1,149317, \\p_u &= 0,302443, & p_d &= 0,468074, & p_m &= 0,229483.\end{aligned}$$

В результате согласно значениям  $u$ ,  $m$  и  $d$  получаем триномиальное дерево для изменения стоимости  $S_t$  базисного актива (PV денежных притоков пилотного проекта) в руб. (табл. 15). В этой же

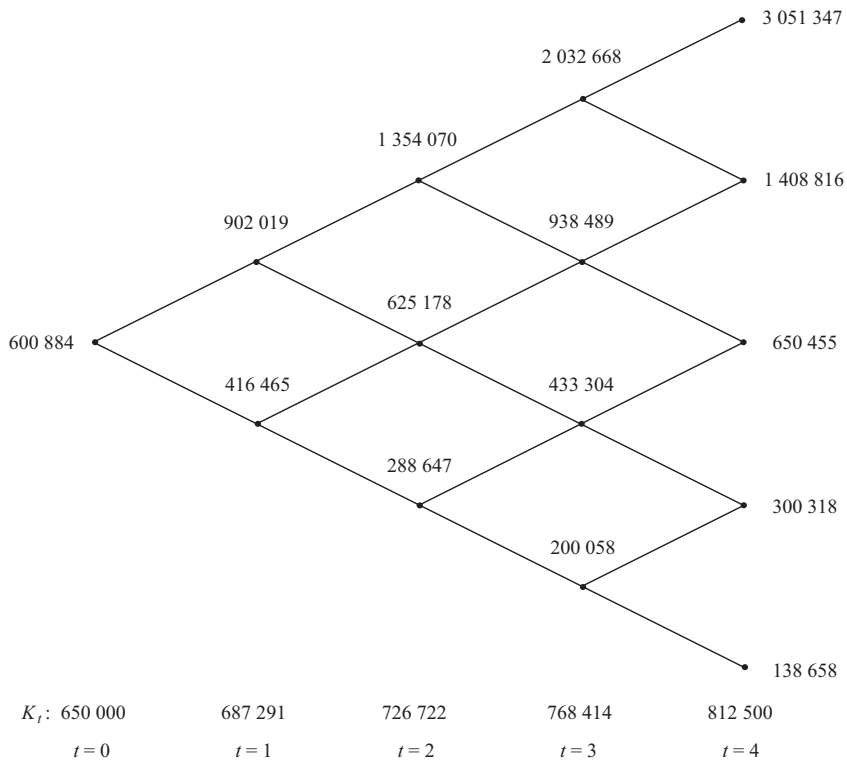


Рис. 22. Биномиальное дерево изменения цены базисного актива (руб.)

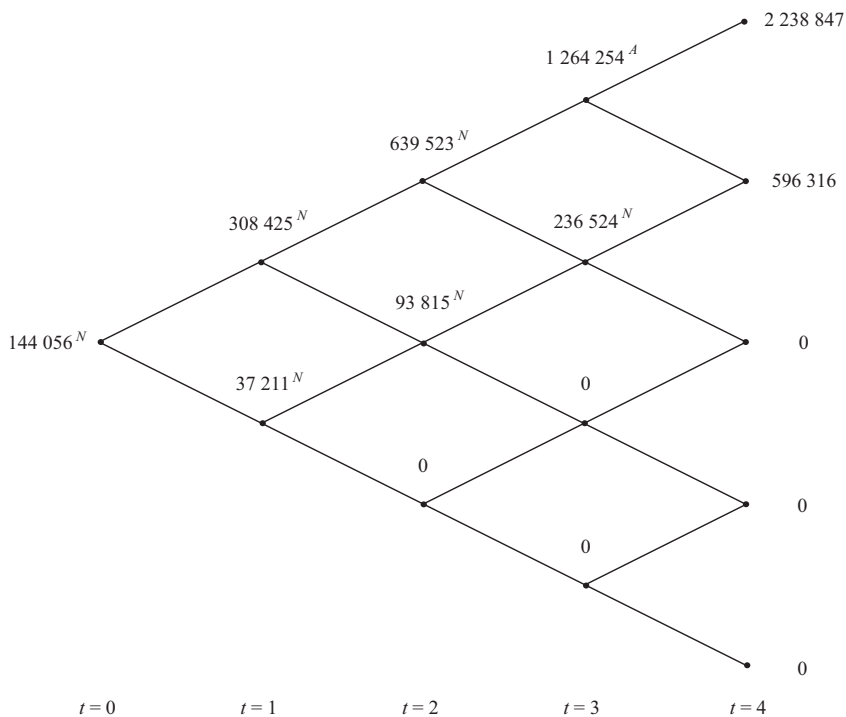


Рис. 23. Биномиальное дерево изменения цены реального опциона (руб.)



таблице покажем изменение цены исполнения опциона ( $K_t$ ) по квартальной ставке инфляции  $i = \sqrt[4]{1,25} - 1 = 0,057371$ .

Поскольку мы рассматриваем колл-опцион, то в каждом периоде  $t$  цена “мертвого” опциона ( $C_t^A$ ) вычисляется по формуле (24). Тогда, используя формулы (32) и (24), можно последовательно рассчитывать цены опциона, начиная с четвертого квартала и заканчивая настоящим моментом времени (табл. 16). При этом в каждом узле триномиальной решетки в целях последовательного расчета из цен  $C_t^N$  и  $C_t^A$  выбирается максимальная.

В результате, работая по дереву от его конца к началу, мы можем получить цену данного опциона пилотного проекта в нуле. Она составит величину  $C_0 = 142\,293$  руб. Тогда NPV проекта модернизации оборудования с 9-ю опционами составит

$$\text{NPV} = 142\,293 \cdot 9 - 49\,116 = 1\,231\,521 \text{ (руб.)},$$

что несколько больше результата расчета согласно ОРМ, но меньше результата расчета согласно биномиальной модели. Это еще более точная оценка эффекта проекта.

Проведем сравнение результатов трех описанных моделей оценки азиатского реального опциона модернизации оборудования компании с постоянной волатильностью бизнеса. Напомним, что в целях анализа использовались три модели: 1) модель Блэка–Шоулза (ОРМ); 2) биномиальная модель (ВТМ); 3) триномиальная модель (ТТМ).

Сравнение цен опциона в исследуемом примере дает следующие результаты:

$$C_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} 129\,966 & < 142\,293 & < 144\,056 \\ \text{(ОРМ)} & \text{(ТТМ)} & \text{(ВТМ)} \end{array} \right\}.$$

Тогда NPV проекта модернизации оборудования компании с 9-ю опционами составит:

$$\text{NPV} = \left\{ \begin{array}{ccc} 1\,120\,578 & < 1\,231\,521 & < 1\,247\,388 \\ \text{(ОРМ)} & \text{(ТТМ)} & \text{(ВТМ)} \end{array} \right\}.$$

Таблица 15

**Триномиальная решетка изменения цены  
базисного актива (руб.)**

	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$
$S_t$					3 731 680
				2 363 883	2 411 197
			1 497 433	1 527 405	1 557 978
		948 569	967 555	986 922	1 006 677
	600 884	612 911	625 179	637 693	650 457
		396 028	403 955	412 040	420 288
			261 013	266 237	271 566
				172 027	175 470
$K_t$	650 000	687 291	726 722	768 414	812 500

Таблица 16

**Триномиальная решетка изменения цены  
реального опциона (руб.)**

	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$
$C_t$					2 919 180
				1 595 469 <sup>A</sup>	1 598 697
			770 711 <sup>A</sup>	758 991 <sup>A</sup>	745 478
		340 461 <sup>N</sup>	311 026 <sup>N</sup>	264 726 <sup>N</sup>	194 177
	142 293 <sup>N</sup>	120 629 <sup>N</sup>	91 447 <sup>N</sup>	57 575 <sup>N</sup>	0
		30 955 <sup>N</sup>	17 071 <sup>N</sup>	0	0
			0	0	0
				0	0
				0	

Без пересчета в рублях входных параметров опциона была получена иная зависимость для цены опциона и NPV проекта, а именно,

$$\text{OPM} < \text{VTM} < \text{TTM}.$$

Такой новый результат обусловлен следующими причинами:

1. Поскольку мы пересчитывали  $\sigma$  с учетом коэффициента корректировки на риск для России, а также использовали в качестве безрисковой ставку рефинансирования 8,25% и реальный уровень инфляции в России 25%, мы проводили таким образом оценку в условиях  $i > r_f$ , в то время как в развитых странах соотношение ставок иное:  $i < r_f$ .
2. Указанный подход привел к тому, что в некоторых узлах биномиальной и триномиальной решеток цена “мертвого” (исполненного) опциона превысила цену “живого” (не исполненного) опциона. А это, в свою очередь, привело к тому, что наиболее высокую оценку реального опциона дала биномиальная модель, а не триномиальная, как это было в долларах.

Данный результат не противоречит финансовой практике оценки реальных опционов, а скорее подтверждает ее основные выводы. Так, например, представители бразильской финансовой школы реальных опционов [29] утверждают, что биномиальная CRR-модель дает несколько завышенную оценку опциона. И это при том, что представители финской школы [50] показали, что триномиальная модель является более точной дискретной моделью оценки, нежели биномиальная. Это не противоречит классической теории опционов, поскольку, чем больше мы знаем о будущем, тем точнее будет настоящая оценка актива. А главное, что подобные рассуждения подводят нас к основному выводу относительно практики оценки азиатских реальных опционов:

*Оценку азиатского реального опциона необходимо проводить в условиях инфляции, что позволяет учесть влияние безрисковой ставки по инвестициям на стоимость опциона.*

Все эти выводы могут существенно влиять на принятие управленческих решений в отношении инвестиций в инновации. Полученные

результаты могут способствовать модернизации программного обеспечения, позволяющего составлять и оценивать реальные опционы. Наконец, они могут быть полезны бизнесменам, менеджерам и финансовым аналитикам прежде всего производственных компаний в целях разработки и обоснования стратегических решений в инновационном развитии бизнеса.

## Глава 4

# Стохастическое доминирование в управлении кредитным риском

### 4.1. Инвестиционная модель управления кредитным риском

Опыт кризисных явлений на развивающемся финансовом рынке России поставил перед финансовыми учреждениями вопрос более тщательной оценки рисков своих операций. Грамотное управление различными рисками с их стороны способствует повышению их финансовой устойчивости, а, следовательно, и более стабильному развитию. В связи с этим формирование прогрессивных методов риск-менеджмента приобретает все большую актуальность в деятельности финансовых учреждений.

Одним из наиболее важных рисков в деятельности финансовых учреждений является кредитный риск. Кредитные операции банков составляют значительную финансовую долю их операций, а потому непосредственно влияют на получение прибыли. Однако просто оценивать кредитный риск не достаточно. Необходимо разрабатывать и использовать соответствующие методы управления таким риском. В данной работе предлагается для этого использовать инвестиционный подход, основная идея которого заключается в управлении как риском невозврата кредитов, так и риском получения вмененных убытков.

В настоящее время в финансовой литературе по банковскому делу очень часто предлагается для оценки кредитного риска использовать данные по структуре уже имеющейся задолженности банков [26, 27, 43, 46, 68, 83]. В данном случае структура может быть любой: задолженность по отраслям, по направлениям бизнеса заемщиков, по срокам кредитов и т. д. Такой подход ориентирован лишь на определение вероятности невозврата долгов или на их возврат не в полном объеме. При этом не оцениваются возможности банков получить вмененные убытки в результате выбора менее перспективных

направлений кредитования. Под вмененными убытками будем понимать ту упущенную выгоду в денежном выражении, которую банки имеют в этом случае.

Для решения указанной проблемы можно использовать инвестиционный подход. А именно, коммерческий банк можно рассматривать как инвестора, который, прежде чем инвестировать свои средства в какие-либо направления деятельности, просчитывает как возможности получения убытков, так и возможности недополучения дохода в результате выбора не самой оптимальной инвестиционной альтернативы. Для того, чтобы банкам использовать подобный метод выбора направлений кредитования, необходимо анализировать не структуру задолженности, а структуру имеющихся объемов кредитования. В этом случае объемы кредитования считаются нарастающим итогом, например, с начала года. Тогда руководство коммерческого банка может достаточно детально оценить структуру текущих направлений кредитования и выбрать наиболее перспективные. При этом объемы кредитования также можно расценивать как величины задолженности, с той лишь поправкой, что это будет имеющаяся задолженность с начала года, если, к примеру, объемы кредитования рассматриваются нарастающим итогом с начала года.

Чтобы решить обозначенную задачу достаточно точно, необходим соответствующий инструментарий анализа. Для этого будем рассматривать направления кредитования как альтернативы, среди которых надо выбрать лучшие. Под лучшими альтернативами будем понимать те, которые характеризуются меньшим риском изменения дохода, а потому являются более привлекательными для консервативного инвестора. Такую задачу можно решать, используя критерии стохастического доминирования [4, 5, 44, 61], дополняя их элементами теории голосований [8].

Сначала теоретически обоснуем алгоритм сравнения альтернатив с использованием указанных методов. При этом для удобства дальнейших рассуждений кредитные альтернативы назовем титулами, а их объемы в денежном выражении — ценами титулов.

Пусть нам известно изменение средневзвешенной цены каждого из  $n$  титулов за  $m$  моментов наблюдения. Представим эти данные в виде прямоугольной матрицы  $A$  размерности  $n \times m$ , каждый элемент

которой  $a_{ij}$  численно равен цене  $i$ -го титула в  $j$ -й момент наблюдения.

Для решения поставленной задачи с использованием критериев стохастического доминирования необходимо привести данные матрицы  $A$  к сопоставимому виду. Для этого сначала вычислим среднее значение  $b_i$  элементов каждой строки матрицы  $A$ . Вводя для удобства дальнейших выкладок обозначение

$$S_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}, \quad (33)$$

можем записать:

$$b_i = \frac{S_i}{m}.$$

Далее для элементов каждой из строк введем корректирующий множитель  $k_i$  как отношение среднего элементов 1-й строки к среднему элементов  $i$ -й строки, т. е.

$$k_i = \frac{b_1}{b_i} = \frac{\frac{S_1}{m}}{\frac{S_i}{m}}.$$

Таким образом, при вычислении корректирующего множителя удобнее пользоваться соотношением

$$k_i = \frac{S_1}{S_i}. \quad (34)$$

Теперь мы можем построить матрицу с исходными данными для стохастического доминирования, которая играет важнейшую роль при решении поставленной задачи и определяется следующим образом.

**Определение 1.** Матрицей исходных данных для стохастического доминирования называется прямоугольная матрица  $C$  размерности  $n \times m$ , каждый элемент которой определяется по правилу

$$c_{ij} = a_{ij} \cdot k_i, \quad (35)$$

после чего элементы каждой строки располагаются в порядке возрастания.

Следующая теорема устанавливает свойства матрицы  $C$ , используемые при дальнейшем развитии теории.

**Теорема 1.** (Свойства матрицы исходных данных для стохастического доминирования)

1. Сумма элементов любых строк матрицы  $C$  совпадает и равна величине  $S_1$ , определенной согласно соотношения (33), т. е.

$$\sum_{j=1}^m c_{ij} = S_1 \quad \text{для} \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

2. Если для любых двух строк с номерами  $i$  и  $k$  выполняется  $c_{i1} > c_{k1}$ , то существует число  $p$ , такое, что для любого  $s$ , удовлетворяющего соотношению  $p < s \leq m$ , выполняется  $c_{is} < c_{ks}$ .

Последнее свойство означает, что если первые  $p$  элементов  $i$ -й строки больше первых  $p$  элементов  $k$ -й строки, то, начиная с номера  $p + 1$ , все элементы  $i$ -й строки уже меньше соответствующих элементов строки с номером  $k$ .

Данное свойство будет использовано в дальнейшем при применении методов стохастического доминирования.

#### Д о к а з а т е л ь с т в о

1. Зафиксируем в матрице  $C$  две произвольные строки с номерами  $i$  и  $k$  и вычислим суммы входящих в них элементов. Используя соотношения (33), (34) и (35), имеем:

$$\sum_{j=1}^m c_{ij} = \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot k_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot \frac{S_1}{S_i} = \frac{S_1}{S_i} \sum_{j=1}^m a_{ij} = \frac{S_1}{S_i} \cdot S_i = S_1.$$

Аналогично

$$\sum_{j=1}^m c_{kj} = S_1.$$



2. Пусть теперь  $c_{i1} > c_{k1}$ . Предположим противное, т. е. то, что неравенство  $c_{ij} > c_{kj}$  выполняется для всех  $j = \overline{1, m}$ . Но тогда

$$\sum_{j=1}^m c_{ij} > \sum_{j=1}^m c_{kj},$$

что противоречит доказанному в пункте 1 утверждению.

Теорема доказана полностью.

**Определение 2.** Матрицей сравнения альтернатив называется квадратная матрица  $X$  размерности  $n \times n$ , каждый элемент которой определяется согласно правилу

$$x_{ij} = \sum_s (c_{is} - c_{js}), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n},$$

если  $i \neq j$ . Здесь суммирование ведется по всем  $s$ , удовлетворяющим условию  $c_{is} > c_{js}$ , и  $x_{ij} = 0$ , если  $i = j$ .

Из пункта 2 теоремы 1 следует, что для всех  $i \neq j$  найдется  $s$ , такое, что  $c_{is} > c_{js}$ .

**Теорема 2.** (Свойство матрицы сравнения альтернатив). Матрица сравнения альтернатив является симметричной матрицей, т. е. для всех  $i = \overline{1, n}$  и  $j = \overline{1, n}$  выполняется  $x_{ij} = x_{ji}$ .

С содержательной точки зрения это означает, что число голосов  $i$ -й альтернативы против  $j$ -й совпадает с числом голосов  $j$ -й альтернативы против  $i$ -й.

**Д о к а з а т е л ь с т в о**

Возьмем две произвольные строки в матрице  $C$  с номерами  $i$  и  $j$  и рассмотрим следующую сумму:

$$\sum_{k=1}^m (c_{ik} - c_{jk}),$$

которая согласно пункта 1 теоремы 1 равна нулю. Действительно,

$$\sum_{k=1}^m (c_{ik} - c_{jk}) = \sum_{k=1}^m c_{ik} - \sum_{k=1}^m c_{jk} = S_i - S_j = 0.$$

С другой стороны, согласно пункта 2 теоремы 1 существует число  $p$ , такое, что для всех  $k > p$  выполняется  $c_{ik} < c_{jk}$ . Тогда можем записать:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m (c_{ik} - c_{jk}) &= \sum_{k=1}^p (c_{ik} - c_{jk}) + \sum_{k=p+1}^m (c_{ik} - c_{jk}) = \\ &= \sum_{k=1}^p (c_{ik} - c_{jk}) - \sum_{k=p+1}^m (c_{jk} - c_{ik}). \end{aligned}$$

Последние две суммы есть элементы  $x_{ij}$  и  $x_{ji}$  соответственно. Но тогда  $x_{ij} - x_{ji} = 0$ , что и доказывает теорему.

Далее изложенный алгоритм стохастического доминирования дополняем элементами теории голосований. А именно, элементы матрицы сравнения альтернатив  $X$  сравним между собой, используя правило относительного меньшинства с выбыванием [8]. Для этого суммируем элементы каждого столбца матрицы  $X$  и затем зануляем элементы полученного  $k$ -го столбца с наибольшей суммой  $\sum_{i=1}^n x_{ik}$ . С содержательной точки зрения это означает, что исключается альтернатива с наибольшим числом голосов “против”.

В результате в матрице  $X$  зануляются также элементы  $x_{kj}$  в силу свойства симметричности матрицы.

После этого проделываем то же самое с матрицей  $X$  еще  $m - 3$  раза, пока не останутся два равных симметричных элемента. Для сравнения двух оставшихся титулов можно использовать критерий стохастического доминирования второго порядка [4, 5].

Затем упорядочиваем альтернативы по мере их последовательно исключения. Последняя оставшаяся альтернатива будет наилучшей.

В целях иллюстрации изложенного алгоритма рассмотрим следующий пример. Проведем структурный анализ объемов кредитования юридических лиц и индивидуальных предпринимателей в рублях по регионально-отраслевому признаку, составленных на 1.07.2013 нарастающим итогом с начала года [27]. Таким образом, исходная информация для анализа будет представлена матрицей  $A$  (табл. 17).

В табл. 17 каждый элемент  $a_{ij}$  матрицы  $A$  численно равен цене  $i$ -го титула в  $j$ -й момент наблюдения, где  $i$  — номер федерального округа, а  $j$  — номер отрасли экономики.

В строках табл. 17 отражены следующие федеральные округа:

- 1 — Центральный;
- 2 — Северо-Западный;
- 3 — Южный;
- 4 — Северо-Кавказский;
- 5 — Приволжский;
- 6 — Уральский;
- 7 — Сибирский;
- 8 — Дальневосточный.

В колонках табл. 17 отражены следующие отрасли:

- 1 — добыча полезных ископаемых;
- 2 — добыча топливно-энергетических полезных ископаемых;
- 3 — обрабатывающие производства;
- 4 — производство и распределение электроэнергии, газа и воды;
- 5 — сельское хозяйство, охота и лесное хозяйство;
- 6 — строительство;
- 7 — транспорт и связь;
- 8 — оптовая и розничная торговля, ремонт автотранспортных средств;
- 9 — операции с недвижимостью, аренда и предоставление услуг;
- 10 — прочие виды деятельности;
- 11 — на завершение расчетов.

Вычисляя для каждой из строк матрицы  $A$  корректирующий множитель  $k_i$  и умножая затем каждый элемент  $i$ -й строки на соответствующий ей множитель в целях сравнимости исходных данных, получаем матрицу  $C$  исходных данных для стохастического доминирования (табл. 18), располагая при этом элементы каждой строки в ней в порядке возрастания.

Далее вычисляем все элементы  $x_{ij}$  матрицы сравнения альтернатив  $X$  согласно определения 2. Так, например, элемент  $x_{12}$  вычисляется следующим образом:

$$x_{12} = 11\,628 - 3\,645 + 33\,302 - 19\,403 + 621\,100 - 453\,793 + \\ + 674\,821 - 626\,089 + 860\,399 - 842\,047 = 256\,273.$$

Таблица 17

**Объемы кредитования юридических лиц и индивидуальных предпринимателей в рублях по видам экономической деятельности (млн руб.)**

	Отрасли										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	33 302	11 628	621 100	115 097	74 207	223 565	158 952	874 663	246 689	860 399	674 821
2	3 396	638	1 09 581	40 389	15 929	70 886	28 157	159 751	26 089	79 425	147 379
3	955	488	89 547	21 171	51 435	22 267	8 664	132 119	12 495	52 973	84 459
4	166	85	20 896	10 161	10 021	4 627	1 594	26 922	1 870	3 728	11 908
5	27 859	24 769	348 964	78 149	52 350	46 954	25 191	246 660	42 381	143 481	154 597
6	12 006	8 668	122 498	14 678	7 505	41 494	14 631	107 829	20 552	34 333	125 780
7	21 864	16 293	86 379	45 098	22 313	36 598	25 492	144 867	19 314	40 117	167 502
8	6 900	952	22 009	29 330	5 708	24 785	11 213	53 665	5 925	11 841	39 368

Таблица 18

**Матрица исходных данных для стохастического доминирования (млн руб.)**

	Скорректированные объемы кредитования										
	$c_{i1}$	$c_{i2}$	$c_{i3}$	$c_{i4}$	$c_{i5}$	$c_{i6}$	$c_{i7}$	$c_{i8}$	$c_{i9}$	$c_{i10}$	$c_{i11}$
1	11 628	33 302	74 207	115 097	158 952	223 565	246 689	621 100	674 821	860 399	874 663
2	3 645	19 403	91 010	149 059	160 874	230 762	405 006	453 793	626 089	842 047	912 734
3	3 988	7 804	70 800	102 106	173 004	181 960	420 313	432 881	690 176	731 753	1 079 640
4	3 599	7 029	67 491	79 177	157 847	195 911	424 297	430 225	504 194	884 754	1 139 899
5	80 967	82 347	91 068	138 539	153 488	171 127	255 461	469 025	505 363	806 307	1 140 729
6	57 312	66 193	91 684	111 730	112 089	156 946	262 184	316 869	823 438	935 458	960 521
7	101 387	120 186	136 054	138 848	158 630	227 740	249 638	280 633	537 514	901 470	1 042 322
8	17 513	105 006	108 998	126 934	206 278	217 831	404 884	455 952	539 563	724 226	987 237

В итоге имеем матрицу  $X$  (табл. 19). Анализируя эту матрицу сравнения альтернатив согласно правилу относительного меньшинства с выбыванием, получаем следующие предпочтения консервативного инвестора:

$$2 \sim 8 \succ 3 \succ 4 \succ 5 \succ 1 \succ 7 \succ 6.$$

Однако эти результаты пока не дают четкого представления о том, какая из кредитных альтернатив является наиболее привлекательной для инвесторов-банков.

## 4.2. Стохастический метод выбора оптимальной кредитной альтернативы

Чтобы решить указанную проблему, необходимо отдельно сравнить между собой альтернативы 2 и 8, используя для этого критерий стохастического доминирования второго порядка [4, 5]. Для этого сначала упорядочим данные о ценах двух исследуемых альтернатив (табл. 18) в порядке возрастания во второй колонке табл. 20. По причине высокого риска экономики России все события  $s_j$  для каждой альтернативы считаются равновероятными. В этом заключается основная идея стохастического доминирования [4, 5]. Тогда, если какое-то из чисел второй колонки принадлежит одной альтернативе, то ему приписывается вероятность  $1/11$  в колонке “Вероятность”, а для другой альтернативы вероятность этого события равна 0 — она также фиксируется в колонке “Вероятность”. Кумулятивные вероятности можно получить, если последовательно складывать обычные вероятности для каждой альтернативы. Чтобы вычислить разность кумулятивных вероятностей, необходимо из кумулятивной вероятности альтернативы 8 вычесть соответствующую кумулятивную вероятность альтернативы 2. После этого разности кумулятивных вероятностей последовательно складываются в последней колонке табл. 20.

Согласно критерию стохастического доминирования второго порядка [4, 5], если цифры, полученные в последнем столбце табл. 20, положительны, то  $2 \succ 8$ , а если цифры отрицательны, то  $8 \succ 2$ . Если

Матрица сравнения альтернатив (млн руб.)

Федеральные округа	Центральный	Северо-Западный	Южный	Северо-Кавказский	Приволжский	Уральский	Сибирский	Дальневосточный
1	2	3	4	5	6	7	8	
1 Центральный	0	256 273	408 006	467 199	433 527	421 080	478 096	442 313
2 Северо-Западный	256 272	0	258 770	289 162	383 552	439 676	432 580	239 525
3 Южный	408 008	258 773	0	231 197	380 014	479 189	527 277	265 972
4 Северо-Кавказский	467 199	289 163	231 195	0	276 426	539 570	421 828	332 603
5 Приволжский	433 525	383 551	380 010	276 424	0	454 562	292 622	323 705
6 Уральский	421 081	439 678	479,188	539 571	454 565	0	368 694	534 906
7 Сибирский	478 095	432 580	527 174	421 827	292 623	368 692	0	380 262
8 Дальневосточный	442 312	239 525	265 969	332 602	323 706	534 904	380 262	0

Таблица 20

## Применение критерия стохастического доминирования второго порядка

$j$	Цена $c_j$	Вероятность		Кумулятивная вероятность		Разность кумулятивных вероятностей $G(q_j) - F(q_j)$	Кумулятивная разность кумулятивных вероятностей $\sum_{l=1}^j [G(q_l) - F(q_l)]$
		Альт. 2 $q_j$	Альт. 8 $q_j$	Альт. 2 $F(q_j)$	Альт. 8 $G(q_j)$		
1	3645	1/11	0	1/11	0	-1/11	-1/11
2	17513	0	1/11	1/11	1/11	0	-1/11
3	19403	1/11	0	2/11	1/11	-1/11	-2/11
4	91010	1/11	0	3/11	1/11	-2/11	-4/11
5	105006	0	1/11	3/11	2/11	-1/11	-5/11
6	108998	0	1/11	3/11	3/11	0	-5/11
7	126934	0	1/11	3/11	4/11	1/11	-4/11
8	149059	1/11	0	4/11	4/11	0	-4/11
9	160874	1/11	0	5/11	4/11	-1/11	-5/11
10	206278	0	1/11	5/11	5/11	0	-5/11
11	217831	0	1/11	5/11	6/11	1/11	-4/11

$j$	Цена $c_j$	Вероятность		$q_j$	Кумулятивная вероятность		Разность кумулятивных вероятностей $G(q_j) - F(q_j)$	Кумулятивная разность кумулятивных вероятностей $\sum_{l=1}^j [G(q_l) - F(q_l)]$
		Альт. 2	Альт. 8		Альт. 2	Альт. 8		
12	230 762	1/11	0	6/11	6/11	0	-4/11	
13	404 884	0	1/11	6/11	7/11	1/11	-3/11	
14	405 006	1/11	0	7/11	7/11	0	-3/11	
15	453 793	1/11	0	8/11	7/11	-1/11	-4/11	
16	455 952	0	1/11	8/11	8/11	0	-4/11	
17	539 563	0	1/11	8/11	9/11	1/11	-3/11	
18	626 089	1/11	0	9/11	9/11	0	-3/11	
19	724 226	0	1/11	9/11	10/11	1/11	-2/11	
20	842 047	1/11	0	10/11	10/11	0	-2/11	
21	912 734	1/11	0	1	10/11	-1/11	-3/11	
22	987 237	0	1/11	1	1	0	-3/11	



указанные цифры имеют разные знаки, то наибольшее по модулю число в последнем столбце табл. 20 характеризует истинное предпочтение инвестора. Если оно положительно, то  $2 \succ 8$ , а если отрицательно, то  $8 \succ 2$ .

Таким образом, в нашем случае алгоритм стохастического доминирования позволил окончательно получить следующие предпочтения инвестора-банка по региональному признаку:

$$8 \succ 2 \succ 3 \succ 4 \succ 5 \succ 1 \succ 7 \succ 6. \quad (36)$$

Если далее в качестве кредитных альтернатив рассматривать отрасли экономики из табл. 17, то, применяя описанный алгоритм стохастического доминирования, можно получить следующие предпочтения инвестора-банка по отраслевому признаку:

$$6 \sim 8 \succ 11 \succ 7 \succ 3 \succ 4 \succ 5 \succ 1 \succ 2 \succ 9 \succ 10.$$

Они получены на ЭВМ с использованием написанной для этого соответствующей программы. Сравнивая альтернативы 6 и 8 с использованием критерия стохастического доминирования второго порядка, получаем окончательно, что

$$6 \succ 8 \succ 11 \succ 7 \succ 3 \succ 4 \succ 5 \succ 1 \succ 2 \succ 9 \succ 10. \quad (37)$$

Сопоставляя соотношения (36) и (37), можно получить подробную карту предпочтений инвесторов-банков по регионально-отраслевому признаку (табл. 21).

В колонках табл. 21 отражены следующие отрасли:

- 1 — добыча полезных ископаемых;
- 2 — добыча топливно-энергетических полезных ископаемых;
- 3 — обрабатывающие производства;
- 4 — производство и распределение электроэнергии, газа и воды;
- 5 — сельское хозяйство, охота и лесное хозяйство;
- 6 — строительство;
- 7 — транспорт и связь;
- 8 — оптовая и розничная торговля, ремонт автотранспортных средств;
- 9 — операции с недвижимостью, аренда и предоставление услуг;
- 10 — прочие виды деятельности;
- 11 — на завершение расчетов.

Таблица 21

**Предпочтения инвесторов-банков  
по регионально-отраслевому признаку**

	Отрасли											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
Федеральные округа												
1 Центральный				<b>6</b>								
2 Северо-Западный								<b>2</b>				
3 Южный											<b>3</b>	
4 Северо-Кавказский							<b>4</b>					
5 Приволжский												
6 Уральский	<b>8</b>											
7 Сибирский								<b>7</b>				
8 Дальневосточный									<b>1</b>			

В карте предпочтений (табл. 21) жирными цифрами обозначены направления кредитования, начиная с самой выгодной позиции, характеризующейся наименьшим кредитным риском, и заканчивая наименее выгодной позицией. Преимуществом такого ранжирования является то, что коммерческие банки могут определить отрасли экономики в соответствующих федеральных округах, характеризующиеся наименьшим кредитным риском, выбирая при этом наименее рискованные отрасли. Таким образом, наименьшим кредитным риском характеризуется отрасль «Строительство» в Дальневосточном федеральном округе.

В заключение сформулируем полученные выводы:

1. Для управления кредитным риском в коммерческих банках можно использовать инвестиционный подход, основная идея которого заключается в управлении как риском невозврата кредитов, так и риском получения вмененных убытков.
2. Для того, чтобы банкам использовать подобный метод выбора направлений кредитования, необходимо анализировать не структуру задолженности, а структуру имеющихся объемов кредитования. В этом случае объемы кредитования считаются нарастающим итогом, например, с начала года. Тогда руководство коммерческого банка может достаточно детально оценить структуру текущих направлений кредитования и выбрать наиболее перспективные.
3. Такую задачу можно решать, используя для этого алгоритм сравнения кредитных альтернатив, основанный на критериях стохастического доминирования и элементах теории голосований.
4. Структурный анализ объемов кредитования юридических лиц и индивидуальных предпринимателей в рублях по регионально-отраслевому признаку (составленных на 1.07.2013 нарастающим итогом с начала года), проведенный с использованием указанного алгоритма стохастического доминирования, позволил определить отрасли экономики в соответствующих федеральных округах России, характеризующиеся наименьшим кредитным риском.

5. Наименьшим кредитным риском характеризуется отрасль “Строительство” в Дальневосточном федеральном округе.

Полученные результаты исследования помогут коммерческим банкам выбрать наименее рисковые направления своих кредитных операций.

## Заключение

Сформулируем наиболее важные практические выводы, полученные в настоящей монографии.

В *главе 2* разработана модель построения и использования синтетических стрэддлов, позволяющая инвестору значительно снизить индивидуальный фондовый риск, связанный с находящимися в его собственности базисными активами, т. е. акциями. Ставшая уже классической, модель Блэка–Шоулза для этого не подходит по причине того, что синтетический стрэддл предполагает комбинирование инвестором в своем портфеле исследуемой акции и безрисковой облигации, а в модели Блэка–Шоулза присутствует лишь безрисковая процентная ставка, но отсутствует сама безрисковая облигация. Поэтому для построения синтетического стрэддла используется биномиальная модель, учитывающая при этом изменение цены исполнения стрэддла согласно регрессионной прогнозной модели.

В *главе 3* представлена модель оценки проектов R&D методом ROV в условиях ограниченности информации. Использование для этого ставшей уже классической модели Блэка–Шоулза проблематично, поскольку в нее входит средне-квадратическое отклонение доходности контракта, которое точно спрогнозировать не представляется возможным. Кроме того, модель Блэка–Шоулза применима только для европейских опционов. Мы же предполагаем достаточную гибкость опционного контракта, которая подразумевает возможность исполнения опциона досрочно. В связи с этим возникает задача разработки и применения другой модели. В этом качестве нами предлагается использовать биномиальную модель оценки опциона, которая модифицируется для условий повышенного риска.

Кроме того, в *главе 3* предложен метод решения проблемы финансовой постановки задачи оценки эффекта проекта модернизации оборудования производственной компании. Для этого проект анализируется как азиатский реальный опцион с постоянной волатильностью бизнеса. Задача решается с использованием модели Блэка–Шоулза, уточненной и модифицированной биномиальной модели и модифицированной тринომиальной модели. Показано, что наиболее точную оценку опциона и всего проекта в целом дает тринომиальная модель. Также установлена степень влияния разницы между ставкой

инфляции и безрисковой ставкой по инвестициям на точность оценки стоимости азиатского реального опциона. Показано на примере, что в случае опережения темпом инфляции доходности безрисковых инвестиций, характерного для России, оценка опциона в триномиальной решетке будет ниже оценки в биномиальной решетке. Результат имеет практическую ценность для аналитиков, учитывая, что триномиальная модель является более точной дискретной моделью, чем биномиальная.

В главе 4 разработана модель управления кредитным риском в коммерческих банках с использованием критериев стохастического доминирования, дополненная элементами теории голосований. Разработанный алгоритм стохастического доминирования основан на инвестиционном подходе, основная идея которого заключается в управлении как риском невозврата кредитов, так и риском получения вмененных убытков банками.

Все перечисленные модели и полученные на их основе практические выводы могут существенно улучшить процесс принятия управленческих решений в бизнесе, применяя для этого соответствующие фондовые технологии. Полученные результаты могут способствовать совершенствованию программного обеспечения, необходимого для решения поставленных в монографии финансовых задач. А главное, результаты могут быть полезны бизнесменам, финансовым аналитикам и топ-менеджерам производственных компаний и коммерческих банков в целях разработки и обоснования стратегических решений в развитии бизнеса.

## Список литературы

1. Бригхем Ю., Гапенски Л. Финансовый менеджмент: Полный курс: В 2-х т. — СПб.: Экономическая школа, 2005.
2. Доугерти К. Введение в эконометрику: учебник. 2-е изд. — М.: ИНФРА-М, 2004.
3. Кошелев Е. В., Яшин С. Н., Чухманов Д. В. Кредитный и фондовый риски: анализ и управление: монография. — Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, Germany, 2012.
4. Крушвиц Л. Финансирование и инвестиции. — СПб.: Питер, 2000.
5. Крушвиц Л., Шефер Д., Шваке М. Финансирование и инвестиции. Сборник задач и решений. — СПб.: Питер, 2001.
6. Лимитовский М. А. Инвестиционные проекты и реальные опционы на развивающихся рынках: учеб.-практич. пособие. — 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2008.
7. Маршалл Дж. Ф., Бансал В. К. Финансовая инженерия: полное руководство по финансовым нововведениям. — М.: ИНФРА-М, 1998.
8. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. — М.: Мир, 1991.
9. Рош Дж. Стоимость компании: от желаемого к действительному. — Минск: Гревцов Паблшер, 2008.
10. Трифонов Ю. В., Кошелев Е. В., Купцов А. В. Российская модель метода реальных опционов // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. — Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2012, № 2(1), с. 238–243.
11. Трифонов Ю. В., Кошелев Е. В., Чухманов Д. В. Управление кредитным риском в коммерческих банках с использованием алгоритма стохастического доминирования // Управление экономическими системами: электронный журнал, 2010, № 4(24). Режим доступа к журн.: <http://uecs.mcsnp.ru>.
12. Трифонов Ю. В., Яшин С. Н., Кошелев Е. В. Оценка эффективности инновационных проектов с постоянной волатильностью бизнеса методом ROV // Актуальные вопросы экономики, менеджмента и инноваций: материалы Международной научно-практической конференции. Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева. — Н. Новгород: Изд-во НГТУ, 2013, с. 53–76.

13. Трифонов Ю. В., Яшин С. Н., Кошелев Е. В. Планирование модернизации оборудования производственной компании методом реальных опционов // Труды Нижегородского государственного технического университета им. Р. Е. Алексеева. Серия: Экономика, инновации и менеджмент. — Н. Новгород: Изд-во НГТУ, 2013, № 2(99), с. 257–270.
14. Трифонов Ю. В., Яшин С. Н., Кошелев Е. В. Применение реальных опционов для инвестирования инноваций в условиях ограниченности информации // Финансы и кредит. — М.: ООО “Издательский дом “Финансы и кредит”, 2011, № 30(462), с. 2–9.
15. Трифонов Ю. В., Яшин С. Н., Кошелев Е. В. Разработка и обоснование финансовых планов модернизации оборудования компании на основе методов оценки стоимости реальных опционов // Финансы и кредит. — М.: ООО “Издательский дом “Финансы и кредит”, 2013, № 25(553), с. 2–11.
16. Трифонов Ю. В., Яшин С. Н., Кошелев Е. В. Тестирование технологии синтетических стрэддлов // Управление экономическими системами: электронный журнал, 2014, № 6(8) УЭКС, 8/2013. Режим доступа к журн.: <http://uecs.ru>.
17. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. В 2-х т. — М.: ФАЗИС, 1998.
18. Яшин С. Н., Кошелев Е. В. Инвестирование инновационной деятельности предприятий на основе метода реальных опционов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Серия “Наука и образование” — Инноватика. — СПб: Изд-во Политехнического университета, 2009, № 5(87), с. 124–130.
19. Яшин С. Н., Кошелев Е. В. Оценка рыночной стоимости управленческого опциона инновационного проекта // Инновации в экономике, менеджменте и подготовке кадров. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. — Н. Новгород: Изд-во НГТУ, 2009, с. 280–281.
20. Яшин С. Н., Кошелев Е. В. Применение теории реальных опционов в инвестиционном анализе инновационных проектов // Инновации в экономике, менеджменте и подготовке кадров. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. — Н. Новгород: Изд-во НГТУ, 2009, с. 60–69.



21. Яшин С. Н., Кошелев Е. В., Купцов А. В. Разработка и реализация инновационно-инвестиционной стратегии предприятия: монография. — Н. Новгород: Изд-во НГТУ им. Р. Е. Алексеева, 2011.
22. Яшин С. Н., Кошелев Е. В., Купцов А. В. Разработка и финансовое обеспечение инновационной стратегии предприятия: учеб. пособие. — Н. Новгород: Изд-во НГТУ им. Р. Е. Алексеева, 2012.
23. Яшин С. Н., Кошелев Е. В., Макаров С. А. Российская модель метода реальных опционов, используемого для инвестирования инноваций // Сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции “Инновации в экономике, менеджменте и подготовке кадров”. — Н. Новгород: Изд-во НГТУ, 2011, с. 38–51.
24. Яшин С. Н., Кошелев Е. В., Подшибякин Д. В. Учет влияния инфляции на изменение стоимости азиатского реального опциона // Финансы и кредит. — М.: ООО “Издательский дом “Финансы и кредит”, 2014, № 6(582).
25. Яшин С. Н., Кошелев Е. В., Чухманов Д. В. Инвестиционный подход к управлению кредитным риском в коммерческих банках // Финансы и кредит. — М.: ООО “Издательский дом “Финансы и кредит”, 2011, № 9(441).
26. Банковские риски: учеб. пособие / под ред. О. И. Лаврушина и Н. И. Валенцевой. — М.: КНОРУС, 2007.
27. Бюллетень банковской статистики. Региональное приложение. — М., 2010, № 3(39).
28. Arunkumar, R., and G. Kotreshwar (2006), Risk Management in Commercial Banks (A Case Study of Public and Private Sector Banks), *Social Science Research Network*, <http://ssrn.com/abstract=877812>.
29. Bastian-Pinto, C., L. Brandao and L. Ozorio (2012), A Symmetrical Binomial Lattice Approach, for Modeling Generic One Factor Markov Processes, *Real Options: Theory Meets Practice*, 16th Annual International Conference, June 28–30, 2012, Rome, Italy, <http://realoptions.org/openconf2012/data/papers/26.pdf>.
30. Bastian-Pinto, C. L., L. E. T. Brandao, and W. J. Hahn (2009), Flexibility as a Source of Value in the Production of Alternative Fuels: The Ethanol Case, *Energy Economics*, 31(3), May 2009, pp. 335–510.

31. Bessembinder, H., J. Coughenour, P. Sequin and M. Smoller (1995), Mean Reversion in Equilibrium Asset Prices: Evidence from Futures Term Structure, *The Journal of Finance*, 50(1), pp. 361–375.
32. Black, F., and M. Scholes (1973), The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journ. Polit. Econ.*, May–June 1973, pp. 637–657.
33. Boyle, P. (1988), A lattice framework for option pricing with two state variables, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23, pp. 1–12.
34. Brandao, L., J. Dyer and W. Hahn (2005a), Using Binomial Decision Trees to Solve Real-Option Valuation Problems, *Decision Analysis*, 2(2), June 2005, pp. 69–88.
35. Brandao, L., J. Dyer and W. Hahn (2005b), Response to Comments on Brandao et al. (2005), *Decision Analysis*, 2(2), June 2005, pp. 103–109.
36. Camara, A. (2002), The Valuation of Options on Multiple Operating Cash Flows, *Real Options: Theory Meets Practice*, 6th Annual Real Options Conference, 4–6 July, 2002, Paphos, Cyprus, <http://www.realoptions.org>.
37. Camara, A., and S. L. Cheung (2006), Option Pricing for the Transformed-Binomial Class, *Journal of Futures Markets*, 26(8), pp. 759–787.
38. Chance, D. M. (2001), *An Introduction to Derivatives and Risk Management*, Fort Worth, TX: Harcourt College Publishers.
39. Clewlow, L., and C. Strickland (1999), *Valuing Energy Options in a One Factor Model Fitted to Forward Prices*, Working paper, School of Finance and Economics, University of Technology, Sydney, Australia, April, 1999, [http://www.qfrc.uts.edu.au/research/research\\_papers/rp10.pdf](http://www.qfrc.uts.edu.au/research/research_papers/rp10.pdf), accessed in: September 19, 2009.
40. Copeland, T., and V. Antikarov (2001), *Real Options: A Practitioner's Guide*, Texere.
41. Cox, J., S. Ross and M. Rubinstein (1979), Option Pricing: A Simplified Approach, *Journal of Financial Economics*, 7, pp. 229–263.
42. Dixit, A. K., and R. S. Pindyck (1994), *Investment under Uncertainty*, Princeton: Princeton University Press.
43. Giesecke, K. (2003), Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction, *Social Science Research Network*, <http://ssrn.com/abstract=479323>.

44. Giorgi, E. G., and T. Post (2005), Second Order Stochastic Dominance, Reward-Risk Portfolio Selection and the CAPM, *Social Science Research Network*, <http://ssrn.com/abstract=643481>.
45. Godinho, P. (2006), Monte Carlo Estimation of Project Volatility for Real Options Analysis, *Journal of Applied Finance*, Spring/Summer 2006, 16(1).
46. Gordy, M. (1999), A Comparative Anatomy of Credit Risk Models, *Social Science Research Network*, <http://ssrn.com/abstract=148750>.
47. Guthrie, G. (2009), *Learning Options and Binomial Trees*, Working paper, Feb 15, 2009.
48. Haahtela, T. (2006), Extended Binomial Tree Valuation when the Underlying Asset Distribution is Shifted Lognormal with Higher Moments, *Real Options: Theory Meets Practice*, 10th Annual International Conference, June 14–17, 2006, New York, USA, <http://www.realoptions.org>.
49. Haahtela, T. (2008), Volatility and Ambiguity in Simulation-based Volatility Estimation, *Real Options: Theory Meets Practice*, 12th Annual International Conference, July 9–12, 2008, Rio de Janeiro, Brazil, <http://www.realoptions.org>.
50. Haahtela, T. (2010), Recombining Trinomial Tree for Real Option Valuation with Changing Volatility, *Real Options: Theory Meets Practice*, 14th Annual International Conference, June 16–19, 2010, Rome, Italy, <http://www.realoptions.org/papers2010/241.pdf>.
51. Hahn, W. J., and J. S. Dyer (2008), Discrete Time Modeling of Mean-Reverting Stochastic Processes for Real Option Valuation, *European Journal of Operational Research*, 183(2), Jan 2008, pp. 534–548.
52. Herath, H., and C. Park (2002), Multi-Stage Capital Investment Opportunities as Compound Real Options, *The Engineering Economist*, 47(1), pp. 1–27.
53. Hull, J. C. (1999), *Options, Futures and Other Derivatives*, Upper Saddle River: Prentice Hall, 4th edn.
54. Hull, J. (2006), *Options, Futures and Other Derivatives*, Upper Saddle River: Prentice-Hall, 6th edn.
55. Hull, J., and A. White (1994), Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: Single-Factor Models, *The Journal of Derivatives*, 2(1), Fall, 1994, pp. 7–16.

56. Hull, J., and A. White (1995), Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two-Factor Models, *The Journal of Derivatives*, 2(2), Winter, 1995, pp. 37–48.
57. Jabbour, G., M. Kramin and S. Young (2001), Two-state Option Pricing: Binomial Models Revisited, *Journal of Futures Markets*, Nov 2001, 21, pp. 987–1001.
58. Kapner, K., and J. Marshall (1990), *The Swaps Handbook*, New York: New York Institute of Finance.
59. Koshelev, E., Y. Trifonov and S. Yashin (2012), *Corporate Innovative Strategy: Development and Financing*, Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG.
60. Laughton, D., and H. Jacoby (1993), Reversion, Timing Options, and Long-Term Decision Making, *Financial Management*, 33, pp. 225–240.
61. Lean, H. H., W. K. Wong and M. McAleer (2006), Stochastic Dominance Test for Risk Seekers: An Application to Oil Spot and Futures Markets, *Social Science Research Network*, <http://ssrn.com/abstract=916383>.
62. Longstaff, F. A., and E. S. Schwartz (2001), Valuing American Options By Simulation: A Simple Least-Square Approach, *Review of Financial Studies*, 14(1), pp. 113–147.
63. Mun, J. (2003), *Real Options Analysis Course: Business Cases and Software Applications*, New Jersey: John Wiley & Sons.
64. Mun, J. (2006), *Real Options Analysis: Tools and Techniques for Valuing Investments and Decisions*, New Jersey: John Wiley & Sons.
65. Myers, S. C. (1977), Determinants of Capital Borrowing, *Journal of Financial Economics*, 5.
66. Nelson, D. B., and K. Ramaswamy (1990), Simple Binomial Processes as Diffusion Approximations in Financial Models, *The Review of Financial Studies*, 3(3), pp. 393–430.
67. Pindyck, R. S., and D. L. Rubinfeld (1991), *Econometric Models and Economic Forecasts*, New York: McGraw-Hill Inc., 3rd edn.
68. Pykhtin, M., and S. Zhu (2006), Measuring Counterparty Credit Risk for Trading Products under Basel II, *Social Science Research Network*, <http://ssrn.com/abstract=941551>.
69. Rubinstein, M. (1983), Displaced diffusion option pricing, *Journal of Finance*, 38(1), March 1983, pp. 213–217.

70. Schwartz, E., and M. Moon (2000), Evaluating Research and Development Investments, *Project flexibility, agency and competition*, eds. Brennan, M. & Trigeorgis, L., Oxford University Press, pp. 85–106.
71. Schwartz, E. S. (1988), Valuing Long Term Commodity Assets, *Financial Management*, 27, pp. 57–66.
72. Schwartz, E. S. (1997), The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging, *The Journal of Finance*, 52(3), pp. 923–973.
73. Trifonov, Yu. V., S. N. Yashin and E. V. Koshelev (2012), Modified Real Options Valuation for Developing Product-Type Innovation Strategies, *International Journal of Business and Social Science*, 3(12), Special Issue – June 2012, pp. 22–32.
74. Trifonov, Yu. V., S. N. Yashin and E. V. Koshelev (2013), Upgrading Corporate Equipment as an Asian Real Option with Constant Business Volatility, *International Journal of Business and Social Science*, 4(4), April 2013, pp. 76–89.
75. Trifonov, Yu., S. Yashin, E. Koshelev and D. Chuhmanov (2013), Application of Synthetic Straddles for Equity Risk Management, *Social Science Research Network*, <http://ssrn.com/abstract=2248764>.
76. Trifonov, Yu., S. Yashin, E. Koshelev and D. Chuhmanov (2014), Investment Approach to Credit Risk Management at Commercial Banks Using Stochastic Dominance Algorithm, *Social Science Research Network*, <http://ssrn.com/abstract=2386297>.
77. Trifonov, Yu., S. Yashin, E. Koshelev and D. Podshibyakin (2013), Asymptotic Complexity Estimate of Financial Processes in Time for Credit Risk Insurance, *Social Science Research Network*, <http://ssrn.com/abstract=2335620>.
78. Trifonov, Yu., S. Yashin, E. Koshelev and D. Podshibyakin (2014a), Inflation Effect on Value Calculation of Asian Real Option, *Social Science Research Network*, <http://ssrn.com/abstract=2370001>.
79. Trifonov, Yu., S. Yashin, E. Koshelev and D. Podshibyakin (2014b), Testing the Technology of Synthetic Straddles, *Social Science Research Network*, <http://ssrn.com/abstract=2429657>.
80. Trigeorgis, L. (1991), A Log-Transformed Binomial Numerical Analysis Method for Valuing Complex Multi-Option Investments, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 26, No. 3, pp. 309–326.

81. Tseng, C., and K. Lin (2007), A Framework Using Two-Factor Price Lattices for Generation Asset Valuation, *Operations Research*, 55(2), pp. 234–251.
82. Willmer, R. (1995), Valuing Start-up venture growth options, *Real options in capital investment: models, strategies, and applications*, ed. Trigeorgis, L., Praeger 1995, USA, pp. 221–239.
83. Zhu, S., and M. Pykhtin (2008), A Guide to Modelling Counterparty Credit Risk, *Social Science Research Network*, <http://ssrn.com/abstract=1032522>.
84. Официальный сайт брокерской компании РБКQUOTE: <http://www.quote.rbc.ru>.
85. Официальный сайт брокерской компании NETTRADER: <http://www.nettrader.ru>.

Подписано в печать 27.10.2014.

Формат 60×84 1/16.

Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 9,5.

Тираж 500 экз. Заказ № 110.

Отпечатано в полном соответствии  
с предоставленным электронным оригинал-макетом  
в ООО “Печатная Мастерская РАДОНЕЖ”  
603005, Нижний Новгород, ул. Минина, 16а.  
Тел.: +7 (831) 418-53-23.